

Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

11. ■ клас



РЕГАЛИЯ 6



Учебникът е за многократна употреба. Не пишете в него!

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1657/31.07.2023 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:



обърнете внимание



исторически бележки



алгоритъм при решаване на някои задачи

* —

незадължителен текст с повишена трудност

— *

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2024 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2024 г.

© Николай Цачев, корица, 2024 г.

© „Регалия 6“, издателство, 2024 г.

ISBN 978-954-745-363-0

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра	5
Контролен тест	7
Начален преговор. Геометрия	8
Контролен тест	11

Тема 1. Степен и логаритъм

1. Корен трети. Свойства	12
2. Корен n -ти. Свойства	15
3. Корен n -ти. Упражнение	18
4. Преобразуване на ирационални изрази	20
5. Преобразуване на ирационални изрази. Упражнение	23
6. Графики на функциите $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$	26
7. Графика на степенната функция. Упражнение	29
8. Степен с рационален степенен показател	33
9. Степен с рационален степенен показател. Свойства	35
10. Преобразуване на изрази, съдържащи степен с рационален степенен показател	38
11. Преобразуване на изрази, съдържащи степен с рационален степенен показател. Упражнение	40
12. Показателна функция. Графика	43
13. Логаритъм	49
14. Основни свойства и сравняване на логаритми	52
15. Логаритмуване на произведение, частно, степен и корен	54
16. Графика на логаритмична функция	57
17. Някои приложения на степен и логаритъм. Упражнение	62
Задачи към тема 1	65
Контролен тест 1	67
Контролен тест 2	68

Тема 2. Решаване на равнинни фигури

18. Решаване на успоредник	69
19. Решаване на видове успоредници. Упражнение	73
20. Решаване на трапец	76
21. Решаване на равнобедрен трапец. Упражнение	79
22. Решаване на четириъгълник	82
23. Решаване на четириъгълник. Упражнение	85
24. Решаване на правилен многоъгълник	88
25. Правилен многоъгълник. Упражнение	92
Задачи към тема 2	94
Контролен тест	96

Тема 3. Тригонометрични функции

26. Обобщен ъгъл. Радиан. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл	98
27. Тригонометрични функции на обобщен ъгъл. Продължение	105
28. Основни тригонометрични тъждества	109
29. Основни тригонометрични тъждества. Упражнение	111
30. Четност, нечетност и периодичност на тригонометричните функции	113
31. Графики на функциите $y = \sin x, y = \cos x$	116
32. Приложение на графиката на функцията $y = \sin x$. Упражнение*	121
33. Графики на функциите $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{cotg} x$	126
34. Формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла	130
35. Формули за синус и косинус от сбор и разлика на два ъгъла. Упражнение	133
36. Формули за тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла	134
37. Формули за тангенс и котангенс от сбор и разлика на два ъгъла. Упражнение	136
38. Формули за тригонометрични функции от удвоен ъгъл	137
39. Формули за тригонометрични функции от половинка на ъгъл	140
40. Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции	141
41. Формули за сбор и произведение на тригонометрични функции. Упражнение	143
Задачи към тема 3	146
Контролен тест	147

Тема 4. Вероятности

42. Вероятност. Преговор	149
43. Условна вероятност. Теорема за умножение на вероятностите	153
44. Условна вероятност. Независими събития	156
45. Модели на многократни експерименти с два възможни изхода	159
46. Модели на многократни експерименти. Упражнение	162
47. Разпределение на вероятностите със сума едно	164
48. Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали	167
49. Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица	170
50. Геометрична вероятност. Упражнение	172
Задачи към тема 4	174
Контролен тест	176

Тема. Годишен преговор

Годишен преговор. Алгебра	178
Годишен преговор. Геометрия и тригонометрия	181
Отговори на задачите	184

1

КОРЕН ТРЕТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен трети

Задача 1. Обемът на куб е 8 cm^3 . Да се намери дължината на ръба на този куб.

Решение:

Означаваме дължината на ръба на куба с a . Тогава от $V = a^3$ получаваме $8 = a^3$. Следователно дължината на ръба на куба е такова число a , което, повдигнато на трета степен, е 8. Записва се $a = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ (cm)}$ и се чете „ a е равно на корен трети (кубичен корен) от 8“.

Определение

Корен трети (кубичен корен) от реалното число a се нарича числото, което, повдигнато на трета степен, е равно на a .

Корен трети от a се означава $\sqrt[3]{a}$, където a е **подкоренна величина**, а 3 – **коренен показател**.

Задача 2. Да се пресметне:

- а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125}$; в) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[3]{0}$; е) $\sqrt[3]{-1}$;
ж) $\sqrt[3]{13^3}$; з) $\sqrt[3]{(-6)^3}$; и) $\sqrt[3]{-13^3}$; к) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; л) $\sqrt[3]{0,216}$.

Решение:

- а) $\sqrt[3]{27} = 3$, защото $3^3 = 27$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$, защото $5^3 = 125$;
в) $\sqrt[3]{-8} = -2$, защото $(-2)^3 = -8$; г) $\sqrt[3]{1} = 1$, защото $1^3 = 1$;
д) $\sqrt[3]{0} = 0$, защото $0^3 = 0$; е) $\sqrt[3]{-1} = -1$, защото $(-1)^3 = -1$;
ж) $\sqrt[3]{13^3} = 13$, защото $13^3 = 13^3$;
з) $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$, защото $(-6)^3 = (-6)^3$;
и) $\sqrt[3]{-13^3} = -13$, защото $(-13)^3 = -13^3$;
к) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$, защото $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$;
л) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, защото $0,6^3 = 0,216$.

Свойства

Някои от свойствата на корен трети са аналогични на свойствата на корен квадратен.

От определението за корен трети следват:

Свойство 1

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a, \text{ при } a \text{ реално число.}$$

Свойство 2

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \text{ при } a \text{ реално число.}$$

От определението за корен трети и свойства 1 и 2 следват други свойства, чрез които се извършват действия с корени.

Свойство 3

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \text{ при } a \text{ и } b \text{ реални числа.}$$

Следствия

- $\sqrt[3]{abc\dots p} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c} \dots \sqrt[3]{p}$, при a, b, c, \dots, p реални числа.
- $\sqrt[3]{a^3 b} = a \sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа (изнасяне на множител пред корен).
- $a \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$, при a и b реални числа (вносяне на множител под корен).

Свойство 4

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \text{ при } a \text{ и } b \text{ реални числа, и } b \neq 0.$$

Задача 3. Да се пресметне:

- а) $\sqrt[3]{17^3}$; б) $\sqrt[3]{-17^3}$; в) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; г) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$; д) $\sqrt[3]{16} \sqrt[3]{4}$;
е) $\sqrt[3]{343000}$; ж) $\sqrt[3]{0,512}$; з) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$; и) $\sqrt[3]{81}$; к) $\sqrt[3]{-0,256}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{17^3} = 17$;

б) $\sqrt[3]{-17^3} = \sqrt[3]{(-17)^3} = -17$;

в) $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$;

г) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{5}{2}$;

д) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^2 \cdot 4} = 4$;

е) $\sqrt[3]{343000} = \sqrt[3]{343}\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{7^3}\sqrt[3]{10^3} = 70$;

ж) $\sqrt[3]{0,512} = \sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = 0,8$;

з) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{-625}{5}} = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$;

и) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$;

к) $\sqrt[3]{-0,256} = \sqrt[3]{(-0,4)^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{(-0,4)^3}\sqrt[3]{4} = -0,4\sqrt[3]{4}$.

Свойство 5

Ако $a < b$, то $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа.

Задача 4. Да се сравнят числата:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$; б) 1 и $\sqrt[3]{5}$; в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$; г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$

От $-2 > -3$ следва, че $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[3]{-3}$;

б) 1 и $\sqrt[3]{5}$

От $1 = \sqrt[3]{1}$ и $1 < 5$ следва, че $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5}$ и $1 < \sqrt[3]{5}$;

в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$

От $-1 = \sqrt[3]{-1}$ и $-1 > -25$ следва, че $\sqrt[3]{-1} > \sqrt[3]{-25}$ и $-1 > \sqrt[3]{-25}$;

г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$

От $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ и $-5 < 5$ следва, че $\sqrt[3]{-125} < \sqrt{(-5)^2}$.

Задачи

1. Пресметнете:

а) $\sqrt[3]{12^3}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^6}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\frac{10000}{729}}$; д) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{-54}$; е) $\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{12,5}$;

ж) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{128}}$; з) $\sqrt[3]{\sqrt{256}}$; и) $\sqrt[3]{-0,001} \cdot \sqrt{200}$; к) $\sqrt{-\sqrt[3]{-216}}$.

2. Докажете равенството:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5^6}} = 5$; б) $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64} = 4$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = 1,5$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3 = -54$.

3. Вярно ли е равенството:

а) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt{25}$; б) $\sqrt[3]{1331} = 11$; в) $-5\sqrt[3]{(-2)^3} = 10$; г) $\sqrt[3]{0} - \sqrt[3]{4\frac{17}{27}} = 1\frac{2}{3}$?

4. Сравнете числата:

а) $\sqrt[3]{-7}$ и $\sqrt[3]{-9}$; б) 2 и $\sqrt[3]{9}$; в) -4 и $\sqrt[3]{-63}$; г) $\sqrt[3]{-216}$ и $3\sqrt{(-2)^2}$.

5. Докажете неравенството:

а*) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2} > 2$; б) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{8} > 0$;

в) $12 - 6\sqrt[3]{0,125} > 0$; г) $-4\sqrt[3]{27} + 4\sqrt[3]{-27} < 0$.

2

КОРЕН n -ТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен n -ти

Изучихме действието коренуване с коренен показател две и три. Сега ще разгледаме по-общото понятие **корен n -ти**.

Определение

Нека $a \geq 0$ е реално число и $n \geq 2$ е естествено число. Неотрицателното реално число b , за което $b^n = a$, се нарича **корен n -ти** от a .

Записва се $b = \sqrt[n]{a}$, където a е **подкоренна величина**, а n – **коренен показател**.

Възниква въпросът съществува ли такова число b и ако съществува, дали е единствено? Отговор на този въпрос дава следната теорема:

Теорема

За всяко неотрицателно реално число a и всяко естествено число $n \geq 2$ съществува единствено неотрицателно число b , за което $b^n = a$.

Доказателството на теоремата изисква знания, които не се разглеждат в училищния курс по математика.

От теоремата следва, че $\sqrt[n]{a}$ съществува и е еднозначно определен. Например:

$\sqrt[3]{8} = 2$, защото $2 > 0$ и $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$, защото $3 > 0$ и $3^4 = 81$.



Обърнете внимание, че $(-3)^4 = 81$, но $\sqrt[4]{81}$ не може да е (-3) , защото $-3 < 0$.