Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

11. клас

РЕГАЛИЯ 6

Учебникът е за многократна употреба. Не пишете в него!

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1657/31.07.2023 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:

обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— незадължителен текст с повишена трудност ——— *

ISBN 978-954-745-363-0

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 3. Тригонометрични функции

Тема 4. Вероятности

Тема. Годишен преговор

ТЕМА 1

СТЕПЕН И ЛОГАРИТЪМ

1 КОРЕН ТРЕТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен трети

Задача 1. Обемът на куб е 8 cm^3. Да се намери дължината на ръба на този куб.

Решение:

Означаваме дължината на ръба на куба с a. Тогава от $V = a^3$ получаваме $8 = a^3$. Следователно дължината на ръба на куба е такова число a, което, повдигнато на трета степен, е 8. Записва се $a = \sqrt[3]{8} = 2$ (cm) и се чете „a е равно на корен трети (кубичен корен) от 8".

Определение

Корен трети (кубичен корен) от реалното число a се нарича числото, което, повдигнато на трета степен, е равно на a.

Корен трети от a се означава $\sqrt[3]{a}$, където a **е подкоренна величина**, а 3 – **коренен показател.**

Задача 2. Да се пресметне:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125}$; в) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[3]{0}$; е) $\sqrt[3]{-1}$;

ж) $\sqrt[3]{13^3}$; з) $\sqrt[3]{(-6)^3}$; и) $\sqrt[3]{-13^3}$; к) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$; л) $\sqrt[3]{0,216}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{27} = 3$, защото $3^3 = 27$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$, защото $5^3 = 125$;

в) $\sqrt[3]{-8} = -2$, защото $(-2)^3 = -8$; г) $\sqrt[3]{1} = 1$, защото $1^3 = 1$;

д) $\sqrt[3]{0} = 0$, защото $0^3 = 0$; е) $\sqrt[3]{-1} = -1$, защото $(-1)^3 = -1$;

ж) $\sqrt[3]{13^3} = 13$, защото $13^3 = 13^3$;

з) $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$, защото $(-6)^3 = (-6)^3$;

и) $\sqrt[3]{-13^3} = -13$, защото $(-13)^3 = -13^3$;

к) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$, защото $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$;

л) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, защото $0,6^3 = 0,216$.

Свойства

Някои от свойствата на корен трети са аналогични на свойствата на корен квадратен.

От определението за корен трети следват:

Свойство 1

$(\sqrt[3]{a})^3 = a$, при a реално число.

Свойство 2

$\sqrt[3]{a^3} = a$, при a реално число.

От определението за корен трети и свойства 1 и 2 следват други свойства, чрез които се извършват действия с корени.

Свойство 3

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа.

Следствия

1. $\sqrt[3]{abc...p} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c}...\sqrt[3]{p}$, при $a, b, c, ...p$ реални числа.

2. $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа (изнасяне на множител пред корен).

3. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$, при a и b реални числа (внасяне на множител под корен).

Свойство 4

$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, при a и b реални числа, и $b \neq 0$.

Задача 3. Да се пресметне:

а) $\sqrt[3]{17^3}$; б) $\sqrt[3]{-17^3}$; в) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; г) $\sqrt[3]{15\dfrac{5}{8}}$; д) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4}$;

е) $\sqrt[3]{343000}$; ж) $\sqrt[3]{0,512}$; з) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$; и) $\sqrt[3]{81}$; к) $\sqrt[3]{-0,256}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{17^3} = 17$; б) $\sqrt[3]{-17^3} = \sqrt[3]{(-17)^3} = -17$;

в) $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$; г) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{5}{2}$;

д) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^2.4} = 4$; е) $\sqrt[3]{343000} = \sqrt[3]{343}\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{7^3}\sqrt[3]{10^3} = 70$;

ж) $\sqrt[3]{0,512} = \sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = 0,8$; з) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{-625}{5}} = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$;

и) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3.3} = \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$;

к) $\sqrt[3]{-0,256} = \sqrt[3]{(-0,4)^3.4} = \sqrt[3]{(-0,4)^3}\sqrt[3]{4} = -0,4\sqrt[3]{4}$.

Свойство 5

Ако $a < b$, то $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа.

Задача 4. Да се сравнят числата:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$; б) 1 и $\sqrt[3]{5}$; в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$; г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$

От $-2 > -3$ следва, че $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[3]{-3}$;

б) 1 и $\sqrt[3]{5}$

От $1 = \sqrt[3]{1}$ и $1 < 5$ следва, че $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5}$ и $1 < \sqrt[3]{5}$;

в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$

От $-1 = \sqrt[3]{-1}$ и $-1 > -25$ следва, че $\sqrt[3]{-1} > \sqrt[3]{-25}$ и $-1 > \sqrt[3]{-25}$;

г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$

От $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ и $-5 < 5$ следва, че $\sqrt[3]{-125} < \sqrt{(-5)^2}$.

Задачи

1. Пресметнете:

а) $\sqrt[3]{12^3}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^6}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\frac{10000}{729}}$; д) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{-54}$; е) $\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{12,5}$;

ж) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{128}}$; з) $\sqrt[3]{\sqrt{256}}$; и) $\sqrt[3]{-0,001}.\sqrt{200}$; к) $\sqrt{-\sqrt[3]{-216}}$.

2. Докажете равенството:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5^6}} = 5$; б) $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64} = 4$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = 1,5$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3 = -54$.

3. Вярно ли е равенството:

а) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt{25}$; б) $\sqrt[3]{1331} = 11$; в) $-5\sqrt[3]{(-2)^3} = 10$; г) $\sqrt[3]{0} - \sqrt[3]{4\dfrac{17}{27}} = 1\dfrac{2}{3}$?

4. Сравнете числата:

а) $\sqrt[3]{-7}$ и $\sqrt[3]{-9}$; б) 2 и $\sqrt[3]{9}$; в) -4 и $\sqrt[3]{-63}$; г) $\sqrt[3]{-216}$ и $3\sqrt{(-2)^2}$.

5. Докажете неравенството:

а*) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2} > 2$; б) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{8} > 0$;

в) $12 - 6\sqrt[3]{0,125} > 0$; г) $-4\sqrt[3]{27} + 4\sqrt[3]{-27} < 0$.

2 КОРЕН n-ТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен n-ти

Изучихме действието коренуване с коренен показател две и три. Сега ще разгледаме по-общото понятие **корен n-ти**.

Определение

Нека $a \geqq 0$ е реално число и $n \geqq 2$ е естествено число. Неотрицателното реално число b, за което $b^n = a$, се нарича **корен n-ти** от a.

Записва се $b = \sqrt[n]{a}$, където a е **подкоренна величина**, а n – **коренен показател.**

Възниква въпросът съществува ли такова число b и ако съществува, дали е единствено? Отговор на този въпрос дава следната теорема:

Теорема

За всяко неотрицателно реално число a и всяко естествено число $n \geqq 2$ съществува единствено неотрицателно число b, за което $b^n = a$.

Доказателството на теоремата изисква знания, които не се разглеждат в училищния курс по математика.

От теоремата следва, че $\sqrt[n]{a}$ съществува и е еднозначно определен. Например:

$\sqrt[3]{8} = 2$, защото $2 > 0$ и $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$, защото $3 > 0$ и $3^4 = 81$.

!

Обърнете внимание, че $(-3)^4 = 81$, но $\sqrt[4]{81}$ не може да е (-3), защото $-3 < 0$.