

Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

12. клас



РЕГАЛИЯ 6

Учебникът ще се ползва няколко години. Не пишете в него!

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1663/31.07.2023 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:



обърнете внимание



исторически бележки



алгоритъм при решаване на някои задачи

* —

— *

незадължителен текст с повишена трудност

Второ издание

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2024 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2024 г.

© Николай Цачев, корица, 2024 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2024 г.

ISBN 978-954-745-362-3

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра.....	5
Начален преговор. Геометрия и тригонометрия	8

Тема 1. Статистика

1. Групиране на данни	10
2. Групиране на данни. Хистограма и полигон	18
3. Таблица и графично представяне на акумулираните честоти	24
4. Таблица и графично представяне на акумулираните честоти. Упражнение	33
5. Характеристики на разсейването	38
6. Характеристики на разсейването. Упражнение	43
7. Вероятност и статистическа честота	46
8. Вероятност и статистическа честота. Упражнение	51
9. Намиране на приближения на мерките на генералната съвкупност чрез извадки	54
10. Оценяване на неизвестен дял в генерална съвкупност чрез извадки. Упражнение	59
Задачи към тема 1	65
Контролен тест	69

Тема 2. Уравнения

11. Модулни уравнения от вида $ ax + b = m$. Преговор	71
12. Модулни уравнения от вида $ ax + b = m$. Упражнение	73
13. Модулни уравнения от вида $ ax^2 + bx + c = m$	76
14. Модулни уравнения. Упражнение	78
15. Основни показателни уравнения	81
16. Основни показателни уравнения. Упражнение	84
17. Показателни уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни уравнения	87
18. Показателни уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни уравнения. Упражнение	88
19. Основни логаритмични уравнения	91
20. Основни логаритмични уравнения. Упражнение	94
21. Логаритмични уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни ..	96
22. Логаритмични уравнения, които се решават чрез полагане. Упражнение	98
23. Показателни и логаритмични уравнения. Упражнение	100
24. Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$	102
25. Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$. Упражнение	106

26. Решаване на основни тригонометрични уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{cotg} x = a$	108
27. Решаване на уравнения от вида $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{cotg} x = a$. Упражнение ...	111
28. Тригонометрични уравнения, които се свеждат до квадратни	113
29. Тригонометрични уравнения. Упражнение	115
30. Приложение на тригонометрията за решаване на геометрични задачи в равнината	117
31. Приложение на тригонометрията за решаване на геометрични задачи в стереометрията	120
Задачи към тема 2	122
Контролен тест	124
Тема 3. Неравенства	
32. Модулни неравенства от вида $ ax^2 + bx + c < m$	126
33. Модулни неравенства от вида $ ax^2 + bx + c > m$	128
34. Иррационални неравенства от вида $\sqrt{ax^2 + bx + c} < (>)mx + n$	131
35. Иррационални неравенства. Упражнение	135
36. Основни показателни неравенства	138
37. Показателни неравенства. Упражнение	141
38. Основни логаритмични неравенства	143
39. Логаритмични неравенства. Упражнение	146
Задачи към тема 3	148
Контролен тест	149
Тема 4. Екстремални задачи	
40. Линейна и квадратна функция. Най-голяма и най-малка стойност ...	151
41. Линейна и квадратна функция. Най-голяма и най-малка стойност. Упражнение	153
42. Основни елементарни неравенства	155
43. Екстремални задачи в алгебрата	157
44. Екстремални задачи в алгебрата. Упражнение	159
45. Екстремални задачи в планиметрията	161
46. Екстремални задачи в планиметрията. Упражнение	163
47. Практически задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на елементарни функции	166
48. Графични модели при решаване на екстремални задачи	168
Задачи към тема 4	171
Контролен тест	172
Тема. Годишен преговор	
Систематичен преговор и обобщение	173
Отговори на задачите	186

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Ирационални изрази

Израз, който съдържа радикал, е ирационален израз.

Допустимите стойности на всеки ирационален израз с квадратни корени се определят от условието подкоренните величини да са неотрицателни.

При тъждествени преобразувания на ирационални изрази са в сила правилата за преобразуване на рационални изрази и свойствата на квадратните корени.

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в множеството от съответните им допустими стойности са верни равенствата:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{A.C}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0; & \left(\frac{A}{B}\right)^n &= \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in N; \\ \frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} &= \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0; & \sqrt{A^2} &= |A|; \\ \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} &= \frac{A.C}{B.D}, B \neq 0, D \neq 0; & \sqrt{AB} &= \sqrt{A}\sqrt{B}, A \geq 0, B \geq 0; \\ \frac{A}{B} : \frac{C}{D} &= \frac{A.D}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0; & \sqrt{\frac{A}{B}} &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, A \geq 0, B > 0. \end{aligned}$$

Ирационални уравнения

Ирационалните уравнения съдържат неизвестно под знака на радикала. Такива уравнения преобразуваме до рационално уравнение чрез:

- повдигане на квадрат на двете страни на уравнението. Полученото рационално уравнение е следствие на ирационалното, което налага проверка дали получените корени са корени и на даденото уравнение.

- прилагане на теоремата $\sqrt{F(x)} = G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = (G(x))^2 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$.

Степен с рационален степенен показател

Степента $a^{\frac{m}{n}}$ с основа a , a – реално положително число и рационален степенен показател $\frac{m}{n}$, m – цяло число, n – естествено число, $n \geq 2$ се определя с равенството $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

За преобразуване на изрази, които съдържат степен с рационален степенен показател и основа реално положително число, се използват свойствата:

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$
- $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$
- $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$
- $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

За сравнение на степени с рационален степенен показател се използват графиката на показателната функция или свойствата:

- Ако $a > 0$, то $a^{\frac{m}{n}} > 0$;
- Ако $a > 1$, то $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$;
- Ако $0 < a < 1$, то $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$;
- Ако $a > 0$ и $a \neq 1$, то $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Логаритъм

Единственото решение на уравнението $a^x = b$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ е $x = \log_a b$, откъдето се вижда, че се логаритмуват само положителните числа.

За логаритмуване на изрази се използват следните равенства:

- $a^{\log_a b} = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$;
- $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ при $a > 0$ и $a \neq 1$;
- $\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$;
- $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$;
- $\log_a N^k = k \log_a N$, $a > 0$, $a \neq 1$ при $N > 0$ и $k \in \mathbf{Q}$;
- $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, $b > 0$ и $b \neq 1$.

За сравняване на логаритми се използват графиката на логаритмичната функция или свойствата:

- Ако $a > 0$ и $a \neq 1$, то $0 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$;
- Ако $a > 1$, то $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$;
- Ако $0 < a < 1$, то $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

Неравенства

За решаване на неравенства от вида $A(x) > 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) < 0$ или $A(x) \leq 0$, където $A(x)$ е разложим многочлен, се използва методът на интервалите.

Формули за преобразуване на сбор или разлика от тригонометрични функции в произведение

$$(4) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$(5) \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$(6) \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$(7) \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Задачи

1. Докажете тъждеството:

a) $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$

б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{4}.$

2. Пресметнете:

a) $\frac{\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \sin 65^\circ}{\sin 11^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 11^\circ};$ б) $\sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8}.$

3. Ако α, β, γ са ъгли в триъгълник, за които знаем, че $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ и, че $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$, $\sin \beta = \frac{1}{2}$, то пресметнете синуса на третия ъгъл.

4. Намерете $\sin 2\alpha$, ако $3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 0.$

5. Ако $\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{15}{8}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то пресметнете $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$

6. Ако $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то пресметнете $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$

7. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sin x + \cos 2x, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right].$

8. Ако за ъглите на триъгълник е изпълнено равенството $\sin \alpha = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, то докажете, че триъгълникът е равнобедрен.

9. Ако за ъглите на триъгълник е изпълнено равенството $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$, то докажете, че триъгълникът е правоъгълен.

10*. Ако ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия и $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$, то намерете мерките им.

1

ГРУПИРАНЕ НА ДАННИ

В обществения и личния ни живот непрекъснато се налага да събираме, обработваме, анализираме и използваме разнообразна полезна информация.

Представената в числов вид информация се нарича **данни**. Данните са два вида – **качествени** (отразяват някакво качество, напр. – пол, раса, народност, образование, цвят на очите и т.н.) и **количествени** (получени чрез измерване, например – дължина, обем, тежест, брой, цена и др.).

Например, информацията за всеки човек съдържа качествени данни (място на раждане, местожителство, пол, образование, религия и др.) и количествени данни (ръст, тегло, доходи и др.).

От наученото дотук знаем, че **статистиката** е науката, която се занимава със събиране, обработване, анализ и интерпретация на данни и която създава методи за изследването им с цел получаване на достоверни изводи. Обект на изследване са множества от данни, като много често това са масовите явления.

Казва се, че е налице **масово явление**, когато в множество единични явления (резултати от опити, наблюдения, обекти) се повтарят определени закономерности, валидни за общността от единичните явления като цяло.

Множеството от голям брой случаи, които характеризират масовото явление, се нарича **статистическа съвкупност**. Отделните случаи, които образуват статистическата съвкупност, се наричат **статистически единици**.

Статистическата информация най-често се представя под формата на статистически източници (годишници, справочници, сборници, таблици и др.), изпълнени с данни, които характеризират обема или равнището на дадено масово явление.

Обикновено таблиците с данни са с голям обем и трудни за използване. Затова се използва графично представяне на данните. Така информацията се разбира по-добре.

④ Коренът е $x = \frac{1}{2}$

Уравнение от вида $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{\log_a b}$ при $a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$, откъдето $f(x) = \log_a b$.

Задача 3. Да се реши уравнението:

а) $3^{2x-3} = 7$; б) $2^{2x-1} = 3^{3-x}$.

Решение:

а) $3^{2x-3} = 7$

① $3^{2x-3} = 7 \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 3^{\log_3 7}$.

② $2x - 3 = \log_3 7$.

③ $2x = \log_3 7 + 3, x = \frac{1}{2}(\log_3 7 + 3)$.

④ Коренът на уравнението е $x = \frac{1}{2}(\log_3 7 + 3)$.

б) $2^{2x-1} = 3^{3-x}$

От $2^{2x-1} > 0$ и $3^{3-x} > 0$, чрез логаритмуване на даденото уравнение при основа 2, се получава $\log_2 2^{2x-1} = \log_2 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x - 1 = (3 - x) \log_2 3$
 $\Leftrightarrow (2 + \log_2 3)x = 3 \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \log_2 3 + 1}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{\log_2 54}{\log_2 12} = \log_{12} 54$.

Задачи

1. Решете уравнението:

а) $6^{5-2x} = 216$; б) $3^{2x-x-51} = 243$; в) $49^x = 343^{2x-5}$;

г) $0,5^{x^2-9} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$; д) $16^x = 64^{x+2}$; е) $5^{x^2+x-30} = 1$;

ж) $2^{x^2-4x-17} = 16$; з) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-7} = \left(1\frac{2}{3}\right)^{7x-1}$; и) $(3^{x^2+4x+3})^{x-4} = 1$.

2. Решете уравнението:

а) $3^{x+2} + 3^{x+3} = 324$; б) $7^{2x+3} - 7^{2(x+1)} = 42$; в) $5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{81}{256}$; д) $2^x \cdot 5^x = 1000^{x-2}$; е) $5^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$;

ж) $3^{\log_3 8} = 2^{x+\log_2 3}$; з) $8^x = 2 \cdot 100^{\lg 8 - 2 \lg 2}$; и) $25^{\frac{1}{x}} = 125$.

3. Решете уравнението:

а) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4}$; б) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

в) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$; г) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 9 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

д) $5^{5x+1} = 2$; е) $4^{x-1} = 3$; ж) $5^{2^{\frac{1}{x}}} = 125$.

16

ОСНОВНИ ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

Задача 1. Да се реши уравнението:

а) $\sqrt{3^x} \cdot 5^{0,5x} = 225^{x^2}$; б) $3^{x+0,5} - 2^{2x-1} = 4^x - 3^{x-0,5}$.

Решение:

а) $\sqrt{3^x} \cdot 5^{0,5x} = 225^{x^2}$ б) $3^{x+0,5} - 2^{2x-1} = 4^x - 3^{x-0,5}$

① $3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{0,5x} = (15^2)^{x^2}$ $(\sqrt{3})^{2x}(3^{0,5} + 3^{-0,5}) = 2^{2x}(1 + 2^{-1})$
 $15^{0,5x} = 15^{2x^2}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-3} = 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$

② $0,5x = 2x^2$ $2x - 3 = 0$

③ $2x^2 - 0,5x = 0$ $2x = 3$
 $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,25$ $x = 1,5$

④ Корените са $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,25$. Коренът е $x = 1,5$.

Уравнение от вида $f(x)^{g_1(x)} = f(x)^{g_2(x)}$, решаваме като разгледаме

I случай

или

II случай

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq \pm 1 \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases}$$

- $f(x) = 0$
- $f(x) = 1$
- $f(x) = -1$

Задача 2. Да се реши уравнението:

а) $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{5x-10}$; б) $(x+5)^{x^2-4x} = (x+5)^{x^2-10x+3}$;
 в) $(x-3)^{x^2-4x-5} = 1$; г) $|x-3|^{x^2-4x-5} = 1$.

Решение:

а) $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{5x-10}$

I случай

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \neq 1 \\ x-2 \neq -1 \\ x^2-2x = 5x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \\ x^2-7x+10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

II случай

$$\bullet \begin{array}{l} x-2=0 \\ x=2 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x-2=1 \\ x=3 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x-2=-1 \\ x=1 \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{array}{lll} 0^{2^2-2.2} = 0^0, & 1^{3^2-2.3} = 1^{5.3-10} & (-1)^{1^2-2.1} = (-1)^{5.1-10} \\ \text{но } 0^0 \text{ е неопределеност} & 1^3 = 1^5 & (-1)^{-1} = (-1)^{-5} \\ x=2 \text{ не е решение} & x=3 \text{ е решение} & x=1 \text{ е решение} \end{array}$$

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1 = 5, x_2 = 3$ и $x_3 = 1$.

б) $(x+5)^{x^2-4x} = (x+5)^{x^2-10x+3}$

I случай

$$\left\{ \begin{array}{l} x+5 \neq 0 \\ x+5 \neq 1 \\ x+5 \neq -1 \\ x^2-4x = x^2-10x+3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq -5 \\ x \neq -4 \\ x \neq -6 \\ 6x = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

II случай

$$\bullet \begin{array}{l} x+5=0 \\ x=-5 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x+5=1 \\ x=-4 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x+5=-1 \\ x=-6 \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{array}{ll} 0^{(-5)^2-4(-5)} = 0^{(-5)^2-10(-5)+3} & 1^{(-4)^2-4(-4)} = 1^{(-4)^2-10(-4)+3} \\ 0^{45} = 0^{78} & 1^{32} = 1^{59} \\ x=-5 \text{ е решение} & x=-4 \text{ е решение} \end{array}$$

$$(-1)^{(-6)^2-4(-6)} = (-1)^{(-6)^2-10(-6)+3}$$

$$(-1)^{60} \neq (-1)^{99}, x=-6 \text{ не е решение}$$

Следователно корените на уравнението са $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -5$ и $x_3 = -4$.

в) $(x-3)^{x^2-4x-5} = 1$

I случай

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 \neq 0 \\ x-3 \neq 1 \\ x-3 \neq -1 \\ x^2-4x-5=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 2 \\ x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5$$

II случай

$$\bullet \begin{array}{l} x-3=0 \\ x_1=3 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x-3=1 \\ x_2=4 \end{array} \text{ или } \begin{array}{l} x-3=-1 \\ x_3=2 \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{array}{lll} 0^{3^2-4.3-5} = 0^{-8}, & 1^{4^2-4.4-5} = 1 & (-1)^{2^2-4.2-5} = 1 \\ \text{но с } 0 \text{ не се дели} & 1^{-5} = 1 & (-1)^{-9} \neq 1 \\ x=3 \text{ не е решение} & x=4 \text{ е решение} & x=2 \text{ не е решение} \end{array}$$

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1 = -1, x_2 = 5$ и $x_3 = 4$.

$$\text{г) } |x - 3|^{x^2 - 4x - 5} = 1$$

I случай

$$\begin{cases} |x - 3| \neq 0 \\ |x - 3| \neq 1 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 4 \text{ и } x \neq 2 \\ x = -1 \text{ и } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5$$

II случай

$$\bullet \begin{cases} |x - 3| = 0 \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} |x - 3| = 1 \\ x = 4 \end{cases} \quad x = 2$$

Проверка:

$$0^{3^2 - 4 \cdot 3 - 5} = 0^{-8} \quad 1^{4^2 - 4 \cdot 4 - 5} = 1 \quad 1^{2^2 - 4 \cdot 2 - 5} = 1$$

$$x = 3 \quad 1^{-5} = 1 \quad 1^{-9} = 1$$

не е решение $x = 4$ е решение $x = 2$ е решение

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1 = -1, x_2 = 5, x_3 = 4$ и $x_4 = 2$.



Изразите 0^0 и $0^{-n}, n \in N$ нямат смисъл.

Задачи

1. Решете уравнението:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64};$

б) $\frac{2}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{8}}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-4};$

в) $2^{\sqrt{x+1}} \sqrt{2\sqrt{6}} = 4^{\sqrt{x+1}};$

г) $2^{x^2 - 6x - 2,5} = 16\sqrt{2};$

д) $(\sqrt{7})^{\frac{x^2 - x + 3}{2}} = 7\sqrt[4]{7};$

е) $2^{x-1} \cdot 5^{x-1} = 0,001 \cdot 10^{2x+5};$

ж) $(15^{x^2 + x - 2})^{x-4} = 1;$

з) $2^{\sqrt{x+1}} = 16\sqrt{(0,25)^{5-0,25x}};$

и) $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} = 80;$

к) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1};$

л) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4};$

м) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2};$

н) $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62;$

о) $3^{x^2 - 5x + 6} = 0, 2^{x^2 - 5x + 6};$

2. Решете уравнението:

а) $(x - 3)^{3x^2 - 10x + 3} = 1;$

б) $|x - 3|^{3x^2 - 10x + 3} = 1;$

в) $(x - 3)^{x^2 - x} = (x - 3)^2;$

г) $\sqrt[4]{(x - 3)^{x+1}} = \sqrt[3]{(x - 3)^{x-2}};$

д) $(x + 2)^{10x^2 - 3x - 1} = 1;$

е) $|x + 2|^{10x^2 - 3x - 1} = 1;$

ж) $x^{x^2 - 5x + 6} = 1;$

з) $|x - 2|^{x^2 - 2x} = |x - 2|^{5x - 10}.$