Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

12. клас

РЕГАЛИЯ 6

Учебникът ще се ползва няколко години. Не пишете в него!

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1663/31.07.2023 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:

обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— незадължителен текст с повишена трудност ——— *

Второ издание

ISBN 978-954-745-362-3

СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Ирационални изрази

Израз, който съдържа радикал, е ирационален израз.

Допустимите стойности на всеки ирационален израз с квадратни корени се определят от условието подкоренните величини да са неотрицателни.

При тъждествени преобразувания на ирационални изрази са в сила правилата за преобразуване на рационални изрази и свойствата на квадратните корени.

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в множеството от съответните им допустими стойности са верни равенствата:

$$\frac{A}{B}=\frac{A.C}{B.C}, B\neq 0, C\neq 0; \qquad \left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}, B\neq 0, n\in N;$$

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}=\frac{A\pm C}{B}, B\neq 0; \qquad \sqrt{A^2}=|A|;$$

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}, B\neq 0, D\neq 0; \qquad \sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}, A\geqq 0, B\geqq 0;$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A.D}{B.C}, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0; \qquad \sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, A\geqq 0, B>0.$$

Ирационални уравнения

Ирационалните уравнения съдържат неизвестно под знака на радикала. Такива уравнения преобразуваме до рационално уравнение чрез:

• повдигане на квадрат на двете страни на уравнението. Полученото рационално уравнение е следствие на ирационалното, което налага проверка дали получените корени са корени и на даденото уравнение.

• прилагане на теоремата $\sqrt{F(x)}=G(x)\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} F(x)=(G(x))^2 \\ G(x)\geqq 0 \end{array}\right.$.

Степен с рационален степенен показател

Степента $a^{\frac{m}{n}}$ с основа a, a – реално положително число и рационален степенен показател $\frac{m}{n}$, m – цяло число, n – естествено число, $n\geqq 2$ се определя с равенството $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

За преобразуване на изрази, които съдържат степен с рационален степенен показател и основа реално положително число, се използват свойствата:

- $a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
- $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
- $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
- $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

За сравнение на степени с рационален степенен показател се използват графиката на показателната функция или свойствата:

- Ако $a > 0$, то $a^{\frac{m}{n}} > 0$;
- Ако $a > 1$, то $\dfrac{m}{n} < \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$;
- Ако $0 < a < 1$, то $\dfrac{m}{n} > \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{p}{q}}$;
- Ако $a > 0$ и $a \neq 1$, то $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Логаритъм

Единственото решение на уравнението $a^x = b$ при $a > 0$ и $a \neq 1$ е $x = \log_a b$, откъдето се вижда, че се логаритмуват само положителните числа.

За логаритмуване на изрази се използват следните равенства:

- $a^{\log_a b} = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$;
- $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ при $a > 0$ и $a \neq 1$;
- $\log_a (N_1N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$;
- $\log_a \dfrac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$;
- $\log_a N^k = k \log_a N$, $a > 0$, $a \neq 1$ при $N > 0$ и $k \in \mathbb{Q}$;
- $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, $b > 0$ и $b \neq 1$.

За сравняване на логаритми се използват графиката на логаритмичната функция или свойствата:

- Ако $a > 0$ и $a \neq 1$, то $0 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$;
- Ако $a > 1$, то $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$;
- Ако $0 < a < 1$, то $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

Неравенства

За решаване на неравенства от вида $A(x) > 0$, $A(x) \geqq 0$, $A(x) < 0$ или $A(x) \leqq 0$, където $A(x)$ е разложим многочлен, се използва методът на интервалите.

Формули за преобразуване на сбор или разлика от тригонометрични функции в произведение

(4) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(5) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

(6) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(7) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Задачи

1. Докажете тъждеството:

а) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{4}$.

2. Пресметнете:

а) $\frac{\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \sin 65^\circ}{\sin 11^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 11^\circ}$; б) $\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8}$.

3. Ако α, β, γ са ъгли в триъгълник, за които знаем, че $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и, че $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$, то пресметнете синуса на третия ъгъл.

4. Намерете $\sin 2\alpha$, ако $3\operatorname{tg}^2\alpha - 10\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$.

5. Ако $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{15}{8}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то пресметнете $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

6. Ако $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то пресметнете $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

7. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sin x + \cos 2x, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Ако за ъглите на триъгълник е изпълнено равенството $\sin\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, то докажете, че триъгълникът е равнобедрен.

9. Ако за ъглите на триъгълник е изпълнено равенството $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, то докажете, че триъгълникът е правоъгълен.

10*. Ако ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия и $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, то намерете мерките им.

ТЕМА 1

СТАТИСТИКА

1 ГРУПИРАНЕ НА ДАННИ

В обществения и личния ни живот непрекъснато се налага да събираме, обработваме, анализираме и използваме разнообразна полезна информация.

Представената в числов вид информация се нарича **данни**. Данните са два вида – **качествени** (отразяват някакво качество, напр. – пол, раса, народност, образование, цвят на очите и т.н.) и **количествени** (получени чрез измерване, например – дължина, обем, тежест, брой, цена и др.).

Например, информацията за всеки човек съдържа качествени данни (място на раждане, местожителство, пол, образование, религия и др.) и количествени данни (ръст, тегло, доходи и др.).

От наученото дотук знаем, че **статистиката** е науката, която се занимава със събиране, обработване, анализ и интерпретация на данни и която създава методи за изследването им с цел получаване на достоверни изводи. Обект на изследване са множества от данни, като много често това са масовите явления.

Казва се, че е налице **масово явление**, когато в множество единични явления (резултати от опити, наблюдения, обекти) се повтарят определени закономерности, валидни за общността от единичните явления като цяло.

Множеството от голям брой случаи, които характеризират масовото явление, се нарича **статистическа съвкупност**. Отделните случаи, които образуват статистическата съвкупност, се наричат **статистически единици**.

Статистическата информация най-често се представя под формата на статистически източници (годишници, справочници, сборници, таблици и др.), изпълнени с данни, които характеризират обема или равнището на дадено масово явление.

Обикновено таблиците с данни са с голям обем и трудни за използване. Затова се използва графично представяне на данните. Така информацията се разбира по-добре.

4 Коренът е $x = \frac{1}{2}$

Уравнение от вида $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{\log_a b}$ при $a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$, откъдето $f(x) = \log_a b$.

Задача 3. Да се реши уравнението:

а) $3^{2x-3} = 7$; б) $2^{2x-1} = 3^{3-x}$.

Решение:

а) $3^{2x-3} = 7$

1 $3^{2x-3} = 7 \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 3^{\log_3 7}$.

2 $2x - 3 = \log_3 7$.

3 $2x = \log_3 7 + 3$, $x = \frac{1}{2}(\log_3 7 + 3)$.

4 Коренът на уравнението е $x = \frac{1}{2}(\log_3 7 + 3)$.

б) $2^{2x-1} = 3^{3-x}$

От $2^{2x-1} > 0$ и $3^{3-x} > 0$, чрез логаритмуване на даденото уравнение при основа 2, се получава $\log_2 2^{2x-1} = \log_2 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x - 1 = (3 - x)\log_2 3$ $\Leftrightarrow (2 + \log_2 3)x = 3\log_2 3 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\log_2 3 + 1}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{\log_2 54}{\log_2 12} = \log_{12} 54$.

Задачи

1. Решете уравнението:

а) $6^{5-2x} = 216$; б) $3^{x^2-x-51} = 243$; в) $49^x = 343^{2x-5}$;

г) $0,5^{x^2-9} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$; д) $16^x = 64^{x+2}$; е) $5^{x^2+x-30} = 1$;

ж) $2^{x^2-4x-17} = 16$; з) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-7} = \left(1\frac{2}{3}\right)^{7x-1}$; и) $(3^{x^2+4x+3})^{x-4} = 1$.

2. Решете уравнението:

а) $3^{x+2} + 3^{x+3} = 324$; б) $7^{2x+3} - 7^{2(x+1)} = 42$; в) $5^{2x+1} - 3.5^{2x-1} = 550$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x . \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{81}{256}$; д) $2^x.5^x = 1000^{x-2}$; е) $5^x.\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$;

ж) $3^{\log_3 8} = 2^{x+\log_2 3}$; з) $8^x = 2.100^{\lg 8 - 2\lg 2}$; и) $25^{\frac{1}{x}} = 125$.

3. Решете уравнението:

а) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2.5^{x-6} + 2.3^{x-4}$; б) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

в) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$; г) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 9 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

д) $5^{5x+1} = 2$; е) $4^{x-1} = 3$; ж) $5^{2^{\frac{1}{x}}} = 125$.

16 ОСНОВНИ ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

Задача 1. Да се реши уравнението:

а) $\sqrt{3^x}.5^{0,5x} = 225^{x^2}$; б) $3^{x+0,5} - 2^{2x-1} = 4^x - 3^{x-0,5}$.

Решение:

а) $\sqrt{3^x}.5^{0,5x} = 225^{x^2}$ б) $3^{x+0,5} - 2^{2x-1} = 4^x - 3^{x-0,5}$

	а)	б)
1	$3^{\frac{x}{2}}.5^{0,5x} = (15^2)^{x^2}$ $15^{0,5x} = 15^{2x^2}$	$(\sqrt{3})^{2x}(3^{0,5} + 3^{-0,5}) = 2^{2x}(1 + 2^{-1})$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-3} = 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$
2	$0,5x = 2x^2$	$2x - 3 = 0$
3	$2x^2 - 0,5x = 0$ $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,25$	$2x = 3$ $x = 1,5$
4	Корените са $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,25$.	Коренът е $x = 1,5$.

Уравнение от вида $f(x)^{g_1(x)} = f(x)^{g_2(x)}$, решаваме като разгледаме

I случай или **II случай**

$$\left|\begin{array}{l} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq \pm 1 \\ g_1(x) = g_2(x) \end{array}\right.$$

- $f(x) = 0$
- $f(x) = 1$
- $f(x) = -1$

Задача 2. Да се реши уравнението:

а) $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{5x-10}$; б) $(x+5)^{x^2-4x} = (x+5)^{x^2-10x+3}$;

в) $(x-3)^{x^2-4x-5} = 1$; г) $|x-3|^{x^2-4x-5} = 1$.

Решение:

а) $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{5x-10}$

I случай

$$\left|\begin{array}{l} x-2 \neq 0 \\ x-2 \neq 1 \\ x-2 \neq -1 \\ x^2-2x = 5x-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \neq 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \\ x^2-7x+10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5$$

II случай

- $x-2=0$ или $x-2=1$ или $x-2=-1$

  $x=2$ $\quad x=3$ $\quad x=1$

Проверка:

$0^{2^2-2.2}=0^0$, но 0^0 е неопределеност, $x=2$ не е решение

$1^{3^2-2.3}=1^{5.3-10}$, $1^3=1^5$, $x=3$ е решение

$(-1)^{1^2-2.1}=(-1)^{5.1-10}$, $(-1)^{-1}=(-1)^{-5}$, $x=1$ е решение

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1=5, x_2=3$ и $x_3=1$.

б) $(x+5)^{x^2-4x}=(x+5)^{x^2-10x+3}$

I случай

$$\left|\begin{array}{l} x+5\neq 0\\ x+5\neq 1\\ x+5\neq -1\\ x^2-4x=x^2-10x+3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\neq -5\\ x\neq -4\\ x\neq -6\\ 6x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

II случай

- $x+5=0$ или $x+5=1$ или $x+5=-1$

  $x=-5$ $\quad x=-4$ $\quad x=-6$

Проверка:

$0^{(-5)^2-4(-5)}=0^{(-5)^2-10(-5)+3}$, $0^{45}=0^{78}$, $x=-5$ е решение

$1^{(-4)^2-4(-4)}=1^{(-4)^2-10(-4)+3}$, $1^{32}=1^{59}$, $x=-4$ е решение

$(-1)^{(-6)^2-4(-6)}=(-1)^{(-6)^2-10(-6)+3}$

$(-1)^{60}\neq(-1)^{99}$, $x=-6$ не е решение

Следователно корените на уравнението са $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-5$ и $x_3=-4$.

в) $(x-3)^{x^2-4x-5}=1$

I случай

$$\left|\begin{array}{l} x-3\neq 0\\ x-3\neq 1\\ x-3\neq -1\\ x^2-4x-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\neq 3\\ x\neq 4\\ x\neq 2\\ x_1=-1 \text{ и } x_2=5\end{array}\right. \Leftrightarrow x_1=-1 \text{ и } x_2=5$$

II случай

- $x-3=0$ или $x-3=1$ или $x-3=-1$

  $x_1=3$ $\quad x_2=4$ $\quad x_3=2$

Проверка:

$0^{3^2-4.3-5}=0^{-8}$, но с 0 не се дели, $x=3$ не е решение

$1^{4^2-4.4-5}=1$, $1^{-5}=1$, $x=4$ е решение

$(-1)^{2^2-4.2-5}=1$, $(-1)^{-9}\neq 1$, $x=2$ не е решение

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1=-1, x_2=5$ и $x_3=4$.

г) $|x-3|^{x^2-4x-5}=1$

I случай

$$\left|\begin{array}{l}|x-3|\neq 0\\ |x-3|\neq 1\\ x^2-4x-5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\neq 3\\ x\neq 4 \text{ и } x\neq 2\\ x=-1 \text{ и } x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow x_1=-1 \text{ и } x_2=5$$

II случай

- $|x-3|=0$ или $|x-3|=1$

  $x=3$ $x=4$ $x=2$

Проверка:

$0^{3^2-4.3-5}=0^{-8}$	$1^{4^2-4.4-5}=1$	$1^{2^2-4.2-5}=1$
$x=3$	$1^{-5}=1$	$1^{-9}=1$
не е решение	$x=4$ е решение	$x=2$ е решение

Следователно корените на даденото уравнение са $x_1=-1, x_2=5, x_3=4$ и $x_4=2$.

> **!** Изразите 0^0 и $0^{-n}, n\in N$ нямат смисъл.

Задачи

1. Решете уравнението:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x.\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$;

б) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{5}{x}}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$;

в) $2^{\sqrt{x+1}}\sqrt{2\sqrt{6}}=4^{\sqrt{x+1}}$;

г) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$;

д) $(\sqrt{7})^{\frac{x^2-x+3}{2}}=7\sqrt[4]{7}$;

е) $2^{x-1}.5^{x-1}=0,001.10^{2x+5}$;

ж) $(15^{x^2+x-2})^{x-4}=1$;

з) $2^{\sqrt{x+1}}=16\sqrt{(0,25)^{5-0,25x}}$;

и) $3^{3x+1}-4.27^{x-1}+9^{1,5x-1}=80$;

к) $3.4^x+\frac{1}{3}.9^{x+2}=6.4^{x+1}-\frac{1}{2}.9^{x+1}$;

л) $5^{x-4}-5^{x-5}=2.5^{x-6}+2.3^{x-4}$;

м) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=7^x+7^{x-1}+7^{x-2}$;

н) $3.4^x+3.4^{x+1}+4^{x+2}=62$;

о) $3^{x^2-5x+6}=0,2^{x^2-5x+6}$;

2. Решете уравнението:

а) $(x-3)^{3x^2-10x+3}=1$;

б) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$;

в) $(x-3)^{x^2-x}=(x-3)^2$;

г) $\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}}=\sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$;

д) $(x+2)^{10x^2-3x-1}=1$;

е) $|x+2|^{10x^2-3x-1}=1$;

ж) $x^{x^2-5x+6}=1$;

з) $|x-2|^{x^2-2x}=|x-2|^{5x-10}$.