

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 1. Основни комбинаторни понятия

1. Множества. Преговор	7
2. Събиране и умножение на възможности	10
3. Съединения	14
4. Вариации, пермутации, комбинации. Упражнение	17
Задачи към тема 1	19
Контролен тест	21

Тема 2. Вектори

5. Вектор	22
6. Събиране и изваждане на вектори. Свойства	29
7. Събиране и изваждане на вектори. Упражнение	34
8. Умножение на вектор с число. Свойства	37
Задачи към тема 2	40
Контролен тест	42

Тема 3. Триъгълник и трапец

9. Еднакви триъгълници (преговор). Четвърти признак за еднаквост... ..	44
10. Деление на отсечка в дадено отношение	48
11. Средна отсечка в триъгълник	52
12. Средна отсечка в триъгълник. Упражнение	56
13. Медицентър на триъгълник	59
14. Медицентър на триъгълник – център на тежестта. Упражнение	62
15. Трапец	65
16. Равнобедрен трапец	68
17. Трапец. Упражнение	72
18. Средна основа (отсечка) в трапец	74
19. Средна отсечка в трапец. Упражнение	78
Задачи към тема 3	81
Контролен тест	83

Тема 4. Квадратен корен

20. Иррационални числа. Квадратен корен	85
21. Иррационални числа. Изобразяване върху числова ос	89
22. Свойства на квадратните корени	93
23. Приложения на свойствата на квадратните корени	97
24. Действия с квадратни корени	99
25. Сравняване на иррационални числа, записани с квадратни корени ...	103
26. Преобразуване на изрази, които съдържат квадратни корени	105
27. Преобразуване на изрази, които съдържат квадратни корени.	
Упражнение	108
28. Рационализиране на изрази, които съдържат квадратни корени	110
Задачи към тема 4	112
Контролен тест	114

Тема 5. Квадратни уравнения

29. Квадратно уравнение. Непълни квадратни уравнения	115
30. Формула за корените на квадратно уравнение	119
31. Съкратена формула за корените на квадратно уравнение	122
32. Квадратни уравнения. Упражнение	125
33. Разлагане на квадратния тричлен на множители	127
34. Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет	130
35. Формули на Виет. Упражнение	132
36. Приложение на формулите на Виет	134
37. Биквадратно уравнение	137
38. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни чрез полагане	139
39. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни чрез разлагане на множители	141
40. Моделиране с квадратни уравнения	143
41. Моделиране с квадратни уравнения. Приложение	145
Задачи към тема 5	147
Контролен тест	149

Тема 6. Окръжност

42. Окръжност. Взаимни положения на точка и окръжност	151
43. Взаимни положения на права и окръжност	155
44. Допирателни към окръжност	158
45. Права и окръжност. Приложение	161
46. Централни ъгли, дъги и хорди	163
47. Диаметър, перпендикулярен на хорда	168
48. Вписан ъгъл	170
49. Периферен ъгъл	174
50. Централен, вписан и периферен ъгъл. Приложение	178
51. Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност	180
52. Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност	182
53. Ъгли, свързани с окръжност. Приложение	184
54. Взаимни положения на две окръжности. Свойства	186
55. Взаимни положения на две окръжности. Приложение	191
56. Общи допирателни на две окръжности. Свойства	193
57. Общи допирателни на две окръжности. Приложение	197
Задачи към тема 6	199
Контролен тест	201

Тема 7. Рационални изрази

58. Рационални дроби. Дефиниционно множество	204
59. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационалните дроби	207
60. Привеждане на рационалните дроби към общ знаменател	210
61. Събиране и изваждане на рационални дроби	212
62. Събиране и изваждане на рационални дроби. Упражнение	213
63. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби	215
64. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби. Упражнение	216
65. Преобразуване на рационални изрази	218
66. Преобразуване на рационални изрази. Упражнение	220
67. Дробни уравнения	223

68. Дробни уравнения. Упражнение	225
69. Моделиране с дробни уравнения	228
70. Моделиране с дробни уравнения. Упражнение.....	230
Задачи към тема 7	232
Контролен тест	234

Тема 8. Вписани и описани многоъгълници

71. Окръжност, описана около триъгълник	236
72. Описана окръжност около триъгълник. Упражнение	239
73. Окръжност, вписана в триъгълник	242
74. Окръжност, вписана в триъгълник. Упражнение	245
75. Външнописани окръжности	248
76. Триъгълник и окръжност. Упражнение	252
77. Ортоцентър на триъгълник	255
78. Забележителни точки в триъгълник	259
79. Четириъгълник, вписан в окръжност	262
80. Четириъгълник, вписан в окръжност. Упражнение	265
81. Четириъгълник, описан около окръжност	268
82. Четириъгълник, описан около окръжност. Упражнение	272
Задачи към тема 8	276
Контролен тест	278

Тема 9. Годишен преговор

83. Годишен преговор. Комбинаторика	280
84. Годишен преговор. Алгебра	281
85. Годишен преговор. Геометрия	283

Отговори на задачите	285
-----------------------------------	------------

1

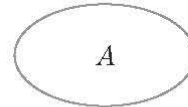
МНОЖЕСТВА. ПРЕГОВОР

В математиката, както и в ежедневието, често разглеждаме съвкупности от обекти, обединени от някакъв общ признак. Например учениците от един клас, книгите в една библиотека, точките от една отсечка, четните естествени числа и др. Такива съвкупности в математиката наричаме множества.

Множеството е първично понятие за математиката и затова не се дава строго определение, а само описание.

Въвеждането на множествата и идеята за приложенията им дължим на германския математик Георг Кантор (1845–1918). В ежедневието използваме думи като клас, ако става дума за ученици, колектив, колекция, а ако става дума за животни използваме стадо, рояк и други подобни. Всички такива думи ни дават примери за множества.

Обектите, които съставят множеството A наричаме негови елементи.



Ако a е елемент на A , се записва $a \in A$ и се чете a принадлежи на A . Ако елементът a не принадлежи на A , се записва $a \notin A$.

Едно множество може да бъде зададено чрез посочване на неговите елементи или чрез описание на признака, по който е съставено това множество. Например:

- чрез посочване: $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ или $C = \{+, -, \times, :\}$.
- чрез признак: A е множеството на четните числа, B е множеството на рационалните числа от интервала $(-1; 4)$ или C е множеството на всички прави, които минават през точката M .

Определение 1

Две множества A и B са **равни**, ако се състоят от едни и същи елементи. Записва се така $A = B$.

Това означава, че всеки елемент на множеството A принадлежи на множеството B и обратно – всеки елемент на B принадлежи на A . Например:

– множеството $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ е равно на множеството от нечетните едноцифрени числа;

– множеството на всички двуцифрени числа, сборът от цифрите на които е равен на 7, съвпада с множеството $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$.

Елементи на множеството могат да бъдат конкретни предмети – столове, маси, животни, хора или по-абстрактни понятия – числа, уравнения, изрази, литературни произведения, телевизионни предавания. Някои множества могат да играят роля на елементи от други множества. Например можем да говорим за множеството от класовете в едно училище, макар че всеки клас от своя страна е множество от ученици.

Прието е да се разглежда и множество, което не съдържа нито един елемент. Това множество се нарича **празно** множество и се бележи със знака \emptyset .

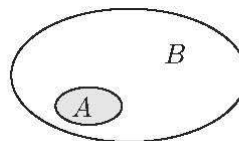
Използването на празното множество носи известни удобства, в което ще се убедим по-нататък. Пример за празно множество е множеството от отговорите на всички въпроси, които нямат отговори. Например: Кое е множеството от нечетни числа с цифра на единиците 2?

Определение 2

Ако всички елементи на едно множество A са елементи на множество B , се казва, че A е **подмножество** на B . Бележи се така $A \subset B$.

Например множеството на целите числа, кратни на 4, е подмножество на множеството на четните числа.

Всяко множество се приема за свое подмножество ($A \subset A$), а празното множество е подмножество на всички множества ($\emptyset \subset B$).



Ако едно множество има n елемента, където n е естествено число, се казва, че то е **крайно**. В противен случай множеството е **безкрайно**.

2. Дадено е уравнението $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Съставете ново квадратно уравнение, чиито корени са:

- а) два пъти по-големи от корените на даденото;
- б) реципрочни на корените на даденото;
- в) кубовете на корените на даденото.

3*. За корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ е изпълнено равенството $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$. Определете a .

37

БИКВАДРАТНО УРАВНЕНИЕ

Някои уравнения от четвърта и по-висока степен могат да се решат с **полагане**, при което се свеждат до познати уравнения.

Определение

Уравнение от вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, където x е неизвестно и a, b и c са дадени числа, се нарича **биквадратно уравнение**.

Задача 1. Да се реши биквадратното уравнение:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + x^2 - 30 = 0$; в) $12x^4 + 41x^2 + 24 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + x^2 - 30 = 0$; в) $12x^4 + 41x^2 + 24 = 0$.

① Биквадратното уравнение свеждаме до квадратно чрез полагането $x^2 = u \geq 0$. Тогава от $x^4 = (x^2)^2 = u^2$ получаваме:

$u^2 - 13u + 36 = 0$; $u^2 + u - 30 = 0$; $12u^2 + 41u + 24 = 0$.

② Решаваме квадратното уравнение спрямо неизвестното u :

$u_1 = 4$ и $u_2 = 9$; $u_1 = -6$ и $u_2 = 5$; $u_1 = -\frac{3}{4}$ и $u_2 = -2\frac{2}{3}$.

③ Заместваме корените u_1 и u_2 (ако съществуват) в $x^2 = u$ и намираме корените на даденото уравнение:

$x^2 = 4$ и $x^2 = 9$	$x^2 = -6$	и $x^2 = 5$	$x^2 = -\frac{3}{4}$ и $x^2 = -2\frac{2}{3}$
$x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 3$	няма решение		$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$
Корени на биквадратното уравнение са	Корени на биквадратното уравнение са		Уравненията нямат реални корени.
$x_1 = 2, x_2 = -2,$ $x_3 = 3, x_4 = -3.$	$x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}.$		Биквадратното уравнение няма решение.



Броят на корените на биквадратното уравнение зависи от броя и знака на корените на съответното му квадратно уравнение.

Някои уравнения с едно неизвестно могат чрез тъждествени преобразувания да се сведат до равносилни на тях биквадратни уравнения.

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$\text{а) } (x^2 - 3)^2 - 4 = 0; \quad \text{б) } \frac{1}{5}(x^2 + 3)^2 + 1 = \frac{1}{5}(3x^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x^2(2x^2 - 3).$$

Решение:

$$\text{а) } (x^2 - 3)^2 - 4 = 0; \quad \text{б) } \frac{1}{5}(x^2 + 3)^2 + 1 = \frac{1}{5}(3x^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}x^2(2x^2 - 3).$$

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 4 = 0 \quad 2(x^2 + 3)^2 + 10 = 2(3x^2 - 1)^2 + 5x^2(2x^2 - 3)$$

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \quad 2(x^4 + 6x^2 + 9) + 10 = 2(9x^4 - 6x^2 + 1) + 10x^4 - 15x^2$$

$$\text{Полагаме } x^2 = u \geq 0 \quad -26x^4 + 39x^2 + 26 = 0 \mid : (-13)$$

$$u^2 - 6u + 5 = 0 \quad 2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$$

$$u_1 = 1 \text{ и } u_2 = 5 \quad \text{Полагаме } x^2 = u \geq 0$$

$$x^2 = 1 \text{ и } x^2 = 5 \quad 2u^2 - 3u - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\sqrt{5} \quad u_1 = 2 \text{ и } u_2 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$x^2 = 2, x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Задачи

1. Решете биквадратното уравнение:

$$\text{а) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \quad \text{б) } 6x^2 + x^4 - 40 = 0; \quad \text{в) } 3x^2 + x^4 + 2 = 0;$$

$$\text{г) } 2x^4 - 5x^2 - 12 = 0; \quad \text{д) } 7x^2 + 2x^4 + 3 = 0; \quad \text{е) } 37x^2 - 36 - x^4 = 0;$$

$$\text{ж) } 4x^4 + 4x^2 + 1 = 0; \quad \text{з) } 4x^4 - 3x^2 + 1 = 0; \quad \text{и) } 14x^2 - x^4 - 45 = 0;$$

$$\text{к) } 7 + 20x^2 - 3x^4 = 0; \quad \text{л) } 2x^4 + 5x^2 - 3 = 0; \quad \text{м) } 25 - 10x^2 + x^4 = 0;$$

$$\text{н) } 3x^4 - 7x^2 + 4 = 0; \quad \text{о) } 2x^4 + 33x^2 + 16 = 0; \quad \text{п) } 9x^4 - 24x^2 + 16 = 0.$$

2. Решете уравнението:

$$\text{а) } (3x^2 - 1)^2 = 16;$$

$$\text{б) } (4x^2 + 1)^2 + 1 = 0;$$

$$\text{в) } (3x^2 - 1)(3x^2 + 1) = 8x^2;$$

$$\text{г) } \frac{1}{4}(x^2 + 2)(x^2 + 6) + \frac{1}{3}(x^2 - 6)^2 = 7 - x^2;$$

$$\text{д) } \frac{1}{2}x^2(x^2 - 7) + \frac{1}{3}(x^2 - 5)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 2) = 2.$$