СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 4. Квадратен корен

Тема 5. Квадратни уравнения

Тема 6. Окръжност

Тема 7. Рационални изрази

ТЕМА 1

ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

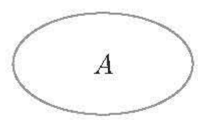
1 МНОЖЕСТВА. ПРЕГОВОР

В математиката, както и в ежедневието, често разглеждаме съвкупности от обекти, обединени от някакъв общ признак. Например учениците от един клас, книгите в една библиотека, точките от една отсечка, четните естествени числа и др. Такива съвкупности в математиката наричаме множества.

Множеството е първично понятие за математиката и затова не се дава строго определение, а само описание.

Въвеждането на множествата и идеята за приложенията им дължим на германския математик Георг Кантор (1845–1918). В ежедневния език използваме думи като клас, ако става дума за ученици, колектив, колекция, а ако става дума за животни използваме стадо, рояк и други подобни. Всички такива думи ни дават примери за множества.

Обектите, които съставят множеството A наричаме негови елементи.



Ако a е елемент на A, се записва $a \in A$ и се чете a принадлежи на A. Ако елементът a не принадлежи на A, се записва $a \notin A$.

Едно множество може да бъде зададено чрез посочване на неговите елементи или чрез описание на признака, по който е съставено това множество. Например:

– чрез посочване: $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ или $C = \{+, -, \times, :\}$.

– чрез признак: A е множеството на четните числа, B е множеството на рационалните числа от интервала $(-1; 4)$ или C е множеството на всички прави, които минават през точката M.

Определение 1

Две множества A и B са **равни**, ако се състоят от едни и същи елементи. Записва се така $A = B$.

Това означава, че всеки елемент на множеството A принадлежи на множеството B и обратно – всеки елемент на B принадлежи на A. Например:

– множеството $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ е равно на множеството от нечетните едноцифрени числа;

– множеството на всички двуцифрени числа, сборът от цифрите на които е равен на 7, съвпада с множеството $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$.

Елементи на множеството могат да бъдат конкретни предмети – столове, маси, животни, хора или по-абстрактни понятия – числа, уравнения, изрази, литературни произведения, телевизионни предавания. Някои множества могат да играят роля на елементи от други множества. Например можем да говорим за множеството от класовете в едно училище, макар че всеки клас от своя страна е множество от ученици.

Прието е да се разглежда и множество, което не съдържа нито един елемент. Това множество се нарича **празно** множество и се бележи със знака $\varnothing$.

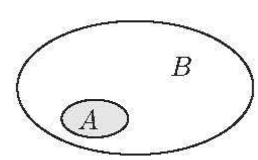
Използването на празното множество носи известни удобства, в което ще се убедим по-нататък. Пример за празно множество е множеството от отговорите на всички въпроси, които нямат отговори. Например: Кое е множеството от нечетни числа с цифра на единиците 2?

Определение 2

Ако всички елементи на едно множество A са елементи на множество B, се казва, че A е **подмножество** на B. Бележи се така $A \subset B$.

Например множеството на целите числа, кратни на 4, е подмножество на множеството на четните числа.

Всяко множество се приема за свое подмножество ($A \subset A$), а празното множество е подмножество на всички множества ($\varnothing \subset B$).



Ако едно множество има n елемента, където n е естествено число, се казва, че то е **крайно**. В противен случай множеството е **безкрайно**.

2. Дадено е уравнението $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Съставете ново квадратно уравнение, чиито корени са:

а) два пъти по-големи от корените на даденото;

б) реципрочни на корените на даденото;

в) кубовете на корените на даденото.

3*. За корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ е изпълнено равенството $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$. Определете a.

37 БИКВАДРАТНО УРАВНЕНИЕ

Някои уравнения от четвърта и по-висока степен могат да се решат с **полагане**, при което се свеждат до познати уравнения.

Определение

Уравнение от вида $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$, където x е неизвестно и a, b и c са дадени числа, се нарича **биквадратно уравнение.**

Задача 1. Да се реши биквадратното уравнение:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + x^2 - 30 = 0$; в) $12x^4 + 41x^2 + 24 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + x^2 - 30 = 0$; в) $12x^4 + 41x^2 + 24 = 0$.

1 Биквадратното уравнение свеждаме до квадратно чрез полагането $x^2 = u \geqq 0$. Тогава от $x^4 = (x^2)^2 = u^2$ получаваме:

$u^2 - 13u + 36 = 0$; $u^2 + u - 30 = 0$; $12u^2 + 41u + 24 = 0$.

2 Решаваме квадратното уравнение спрямо неизвестното u:

$u_1 = 4$ и $u_2 = 9$; $u_1 = -6$ и $u_2 = 5$; $u_1 = -\dfrac{3}{4}$ и $u_2 = -2\dfrac{2}{3}$.

3 Заместваме корените u_1 и u_2 (ако съществуват) в $x^2 = u$ и намираме корените на даденото уравнение:

$x^2 = 4$ и $x^2 = 9$	$x^2 = -6$ и $x^2 = 5$	$x^2 = -\dfrac{3}{4}$ и $x^2 = -2\dfrac{2}{3}$
$x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$	няма решение $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$	Уравненията нямат реални корени.
Корени на биквадратното уравнение са $x_1 = 2, x_2 = -2$, $x_3 = 3, x_4 = -3$.	Корени на биквадратното уравнение са $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$.	Биквадратното уравнение няма решение.

! Броят на корените на биквадратното уравнение зависи от броя и знака на корените на съответното му квадратно уравнение.

Някои уравнения с едно неизвестно могат чрез тъждествени преобразувания да се сведат до равносилни на тях биквадратни уравнения.

Задача 2. Да се реши уравнението:

а) $(x^2-3)^2-4=0$; б) $\frac{1}{5}(x^2+3)^2+1=\frac{1}{5}(3x^2-1)^2+\frac{1}{2}x^2(2x^2-3)$.

Решение:

а) $(x^2-3)^2-4=0$;	б) $\frac{1}{5}(x^2+3)^2+1=\frac{1}{5}(3x^2-1)^2+\frac{1}{2}x^2(2x^2-3)$.
$x^4-6x^2+9-4=0$	$2(x^2+3)^2+10=2(3x^2-1)^2+5x^2(2x^2-3)$
$x^4-6x^2+5=0$	$2(x^4+6x^2+9)+10=2(9x^4-6x^2+1)+10x^4-15x^2$
Полагаме $x^2=u\geqq 0$	$-26x^4+39x^2+26=0 \mid :(-13)$
$u^2-6u+5=0$	$2x^4-3x^2-2=0$
$u_1=1$ и $u_2=5$	Полагаме $x^2=u\geqq 0$
$x^2=1$ и $x^2=5$	$2u^2-3u-2=0$
$x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$	$u_1=2$ и $u_2=-\frac{1}{2}<0$
	$x^2=2, x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$

Задачи

1. Решете биквадратното уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $6x^2+x^4-40=0$; в) $3x^2+x^4+2=0$;
г) $2x^4-5x^2-12=0$; д) $7x^2+2x^4+3=0$; е) $37x^2-36-x^4=0$;
ж) $4x^4+4x^2+1=0$; з) $4x^4-3x^2+1=0$; и) $14x^2-x^4-45=0$;
к) $7+20x^2-3x^4=0$; л) $2x^4+5x^2-3=0$; м) $25-10x^2+x^4=0$;
н) $3x^4-7x^2+4=0$; о) $2x^4+33x^2+16=0$; п) $9x^4-24x^2+16=0$.

2. Решете уравнението:

а) $(3x^2-1)^2=16$;
б) $(4x^2+1)^2+1=0$;
в) $(3x^2-1)(3x^2+1)=8x^2$;
г) $\frac{1}{4}(x^2+2)(x^2+6)+\frac{1}{3}(x^2-6)^2=7-x^2$;
д) $\frac{1}{2}x^2(x^2-7)+\frac{1}{3}(x^2-5)^2-\frac{1}{2}(x^2+2)=2$.