

Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

10. клас



РЕГАЛИЯ 6

Учебникът ще се ползва няколко години. Не пишете в него!

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1147/09.05.2024 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:



обърнете внимание



исторически бележки



алгоритъм при решаване на някои задачи

* —

повишена трудност

— *

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2024 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2024 г.

© Николай Цачев, корица, 2024 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2024 г.

ISBN 978-954-745-365-4

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра	7
Начален преговор. Геометрия	11

Тема 1. Иррационални изрази. Иррационални уравнения

1. Иррационални изрази	15
2. Преобразуване на иррационални изрази	19
3. Преобразуване на иррационални изрази чрез рационализиране	21
4. Преобразуване на иррационални изрази. Упражнение	23
5. Иррационални уравнения с един квадратен радикал	26
6. Иррационални уравнения с два квадратни радикала	30
7. Иррационални уравнения, които се решават чрез полагане	32
8. Иррационални уравнения. Упражнение	33
Задачи към тема 1	36
Контролен тест 1	37
Контролен тест 2	38

Тема 2. Прогресии

9. Числови редици. Начини на задаване на числови редици	40
10. Числови редици. Монотонност	43
11. Аритметична прогресия. Формула за общия член на аритметична прогресия	45
12. Свойства на аритметичната прогресия	48
13. Формула за сбора от първите n члена на аритметична прогресия	50
14. Аритметична прогресия. Упражнение	53
15. Геометрична прогресия. Формула за общия член	54
16. Свойства на геометричната прогресия	57
17. Формула за сбора от първите n члена на геометрична прогресия	60
18. Геометрична прогресия. Упражнение	62
19. Комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия	64
20. Аритметична и геометрична прогресия. Приложения	66

21. Проста лихва. Сложна лихва	70
22. Практически задачи, свързани със сложна лихва	72
Задачи към тема 2	77
Контролен тест	79
Тема 3. Статистика и обработка на данни	
23. Описателна статистика	80
24. Централни тенденции – средноаритметично, мода и медиана	91
Задачи към тема 3	96
Контролен тест	97
Тема 4. Решаване на триъгълник	
25. Тригонометричните функции синус, косинус, тангенс и котангенс в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	99
26. Основни тригонометрични тъждества в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	104
27. Основни тригонометрични тъждества в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$. Упражнение	108
28. Таблица за стойностите на тригонометричните функции от някои специални ъгли в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$	111
29. Синусова теорема	114
30. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема. Основни задачи	118
31. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема. Упражнение	121
32. Косинусова теорема	124
33. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема. Основни задачи	128
34. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема. Упражнение	130
35. Формули за медиани на триъгълник. Формули за ъглополовящи на триъгълник	132
36. Формули за медиани и ъглополовящи на триъгълник. Упражнение .	136
37. Формули за лице на триъгълник	138

38. Формули за лице на триъгълник. Упражнение	142
Задачи към тема 4	144
Контролен тест	145

Тема 5. Елементи от стереометрията

39. Прави и равнини в пространството. Основни аксиоми на стереометрията	147
40. Взаимно положение на две прави в пространството и ъгъл между тях	152
41. Взаимно положение на права и равнина. Перпендикулярност на права и равнина	157
42. Ортогонално проектиране. Теорема за трите перпендикуляра	162
43. Ъгъл между права и равнина. Упражнение	167
44. Взаимно положение на две равнини. Успоредни равнини	171
45. Ъгъл между две равнини. Перпендикулярни равнини	175
46. Права призма	181
47. Пирамида	187
48. Многостен. Упражнение	192
49. Прав кръгов цилиндър	197
50. Прав кръгов конус	200
51. Ротационни тела. Упражнение	205
52. Сфера и кълбо	210
53. Комбинации от тела (Вписани сфери). Упражнение*	214
54. Комбинации от тела (Описани сфери). Упражнение*	217
Задачи към тема 5	220
Контролен тест	223

Тема. Систематичен преговор и обобщение от 8. до 10. клас

55. Тъждествени преобразувания на изрази	225
56. Уравнения	228
57. Системи уравнения с две неизвестни	231
58. Неравенства и системи линейни неравенства с едно неизвестно	233
59. Функции	235

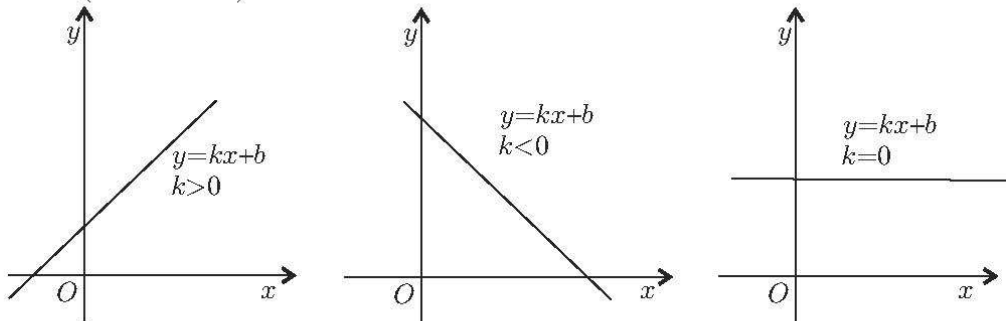
60. Окръжност	238
61. Триъгълник	241
62. Четириъгълник	243
63. Лица на геометрични фигури	245
64. Комбинаторика, вероятности, статистика	246
Отговори на задачите	249

Функции

Функцията е основно понятие в математиката. Казваме, че е зададена функция $y = f(x)$ с дефиниционно множество D и множество от функционални стойности E , ако на всеки елемент $x_0 \in D$ е съпоставен точно един елемент y_0 от E . Елементът $x_0 \in D$ наричаме аргумент, а съответният елемент y_0 от E – функционална стойност в x_0 . Множествата D и E обикновено са съставени от числа и затова такива функции са числови.

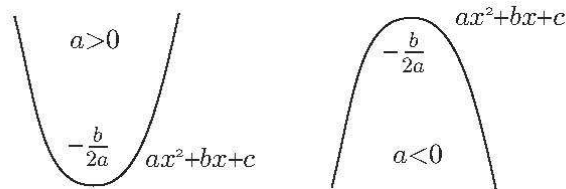
Ако $y = f(x)$ е една функция, за която множеството D е числово (то може да съвпада с множеството на реалните числа, да е определен интервал или друг вид множество от числа), то множеството от точки $(x, f(x))$ наричаме графика на функцията $f(x)$. Ако не е отбелязано нещо специално за D , приемаме, че D съвпада с множеството R на реалните числа. Свойствата на функцията и приближените ѝ стойности може да се определят от вида на нейната графика.

Функция, зададена чрез формулата $y = f(x) = kx + b$, наричаме **линейна функция**. Графиката на тази функция е права линия. В случаите, когато $k > 0$ линейната функция е растяща, при $k < 0$ – намаляваща, а при $k = 0$ е константна (постоянна) величина.



Функция от вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, се нарича **квадратна функция**. Графиката на тази функция е парабола. От представянето

$y = ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right)$, където $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратния тричлен, получаваме, че при $a > 0$ функцията приема най-малка стойност при $x = -\frac{b}{2a}$ и съответно при $a < 0$, функцията приема най-голяма стойност при $x = -\frac{b}{2a}$.



Ако $a > 0$ функцията е намаляваща при $x \leq -\frac{b}{2a}$ и растяща при $x \geq -\frac{b}{2a}$ и обратно при $a < 0$, функцията е растяща при $x \leq -\frac{b}{2a}$ и намаляваща при $x \geq -\frac{b}{2a}$. Точката с координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a} \right)$ се нарича **върх на параболата**.

Системи уравнения

Ако за няколко уравнения търсим всички възможни стойности на неизвестните в тях, които удовлетворяват всяко от уравненията, казваме, че е зададена **система уравнения**.

Системи от вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, за които поне един от коефициентите във всяко от уравненията е ненулев, наричаме система линейни уравнения с две неизвестни x и y . Такива системи обикновено решаваме чрез заместване или чрез събиране.

Тъй като графиките на всяко от уравненията са прави линии, решенията на системата могат да се илюстрират като пресечни точки на двете графики и тогава говорим за графично решаване на системите.

Ако поне едно от уравненията в една система е от втора степен, то системата е от втора степен. Някои от тези системи се решават чрез заместване и събиране, като се прилагат теоремите за равносилност на системи уравнения.

Пример 1. Да се реши системата уравнения $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$.

Решение:

От първото уравнение изразяваме $y = 2x - 1$ и заместваме във второто, т.е. $x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) - 1 = 0$, откъдето $15x^2 - 23x + 8 = 0$. Последното уравнение има две решения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{8}{15}$, откъдето

8. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC = 21$, $BC = 16$ и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Върху страните му AC и BC са взети съответно точките M и N така, че $CM = \frac{1}{7}CA$ и N е среда на BC . Намерете периметъра на четириъгълника $AMNB$.

9. Даден е триъгълник ABC , в който $AB = 7$ и $AC = 9$. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича страната BC в точката D така, че $AD = BD$. Намерете BC .

33

РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА. ОСНОВНИ ЗАДАЧИ

В този урок ще се научим да решаваме произволен триъгълник с използване на косинусова и синусова теорема.

Задача 1. За $\triangle ABC$ са дадени $a = 7$, $b = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Да се намерят c , $\sin \alpha$ и $\sin \gamma$.

Решение:

Косинусовата теорема се прилага, като се записва формулата за страната, лежаща срещу дадения ъгъл

$$8^2 = 7^2 + c^2 - 2 \cdot 7 \cdot c \cdot \cos 30^\circ$$

$$c^2 - 7\sqrt{3}c - 15 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{7\sqrt{3} \pm 3\sqrt{23}}{2}$$

$$c_1 = \frac{7\sqrt{3} - 3\sqrt{23}}{2} < 0 \Rightarrow c_1 \text{ не е решение. Следователно } c = \frac{7\sqrt{3} + 3\sqrt{23}}{2}.$$

От синусовата теорема

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{16}, \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{(7\sqrt{3} + 3\sqrt{23})}{32}.$$

Задача 2. За $\triangle ABC$ са дадени $AC = 6$, $BC = 2\sqrt{13}$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ако точка M е вътрешна за AB , такава, че $AM : MB = 1 : 3$, намерете дължината на CM .

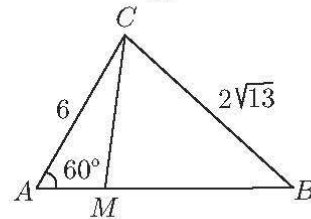
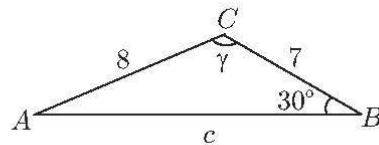
Решение:

От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$$

$$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + c^2 - 2 \cdot 6 \cdot c \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 - 6c - 16 = 0.$$



$c_{1,2} = 3 \pm 5$, $c_1 = 3 - 5 < 0$ и c_1 не е решение. Следователно $c = 8$ и $AM = 2$.

От косинусовата теорема за $\triangle AMC$ намираме:

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow CM = 2\sqrt{7}.$$

Задача 3. Триъгълник има страни a , b и c . Да се намери височината в триъгълника към страната c .

Решение:

От $\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$, $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ и $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ получаваме, че

$$\left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{b}\right)^2 = 1, \text{ т.е. } (c^2 + b^2 - a^2)^2 + 4c^2 h_c^2 = 4b^2 c^2,$$
$$4c^2 h_c^2 = 4b^2 c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2 = (2bc + c^2 + b^2 - a^2)(2bc - c^2 - b^2 + a^2) =$$
$$((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b). \text{ Следователно}$$
$$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2c}.$$

Задачи

1. Намерете страната c на триъгълник, в който $\alpha = 60^\circ$, $a = 10$ и $b = 6$.
2. За триъгълник е дадено $a = 7$, $b = 8$, $\cos \beta = \frac{11}{13}$. Намерете c и γ .
3. Намерете височината към най-голямата страна на триъгълник със страни с дължини:
а) 14, 15, 13; б) 2, 3, 4; в) 25, 12, 17.
4. Намерете радиуса на окръжността, описана около триъгълник със страни 5 cm, 6 cm и 7 cm.
5. За триъгълник ABC е дадено $a = 14$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $R = 25$. Намерете b и c .
6. Две от страните на триъгълник са a и b . Намерете третата му страна, ако тя е равна на радиуса на описаната около него окръжност.
7. Точката I е център на вписаната окръжност в триъгълника ABC , в който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Намерете AB , ако $AI = \frac{4\sqrt{21}}{3}$, $BI = \frac{\sqrt{21}}{3}$.
8. Върху страната BC на триъгълника ABC е взета точка P така, че $CP = \frac{1}{4}CB$. Намерете страната BC , ако $AB = 6$, $AC = 4$ и $AP = 3$.
9. Точката I е център на вписаната в триъгълника ABC окръжност. Намерете $\sphericalangle ACB$, ако $AI = 15$, $BI = 12$, $AB = 3\sqrt{61}$.
10. Намерете страните на триъгълник, ако те са последователни естествени числа и средната по големина височина е $6\sqrt{2}$.

Задача 1. Да се докаже, че ако за дължините на отсечките a , b и c и мерките на ъглите α , β и γ са изпълнени равенствата

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases},$$

то съществува триъгълник със страни a , b и c и ъгли α , β и γ .

Решение:

Тъй като $\cos \alpha \in [-1; 1]$ от равенството $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ следва, че

$$b^2 + c^2 - 2bc < b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha < b^2 + c^2 + 2bc,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc,$$

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2,$$

$$|b - c| < a < b + c.$$

Аналогично $|a - c| < b < a + c$ и $|a - b| < c < a + b$. Следователно съществува триъгълник със страни a , b и c .

От косинусовата теорема следва, че ъглите на този триъгълник са α , β и γ .

Задача 2*. Да се докаже, че всяка една от дадените системи уравнения за елементите на един триъгълник следва от другите две.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}; \quad \begin{cases} a = b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \\ c = a \cos \beta + b \cos \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}.$$

*

Решение:

$$\text{Нека е вярно, че } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}. \text{ Тогава } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \quad \text{и}$$

$$b \cos \gamma + c \cos \beta = b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a;$$