Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

10. клас

РЕГАЛИЯ 6

Учебникът ще се ползва няколко години. Не пишете в него!

Учебникът е одобрен със заповед РД09-1147/09.05.2024 г.
на министъра на образованието и науката

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* повишена трудност *

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2024 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2024 г.

© Николай Цачев, корица, 2024 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2024 г.

ISBN 978-954-745-365-4

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 5. Елементи от стереометрията

Тема. Систематичен преговор и обобщение от 8. до 10. клас

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

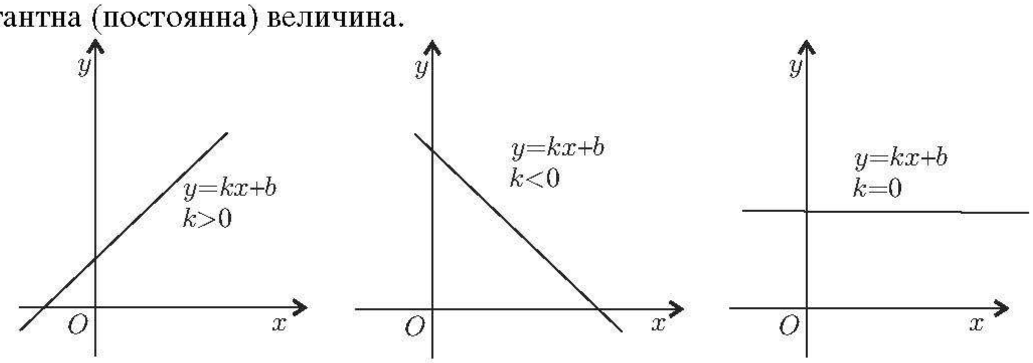
НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Функции

Функцията е основно понятие в математиката. Казваме, че е зададена функция $y = f(x)$ с дефиниционно множество D и множество от функционални стойности E, ако на всеки елемент $x_0 \in D$ е съпоставен точно един елемент y_0 от E. Елементът $x_0 \in D$ наричаме аргумент, а съответният елемент y_0 от E – функционална стойност в x_0. Множествата D и E обикновено са съставени от числа и затова такива функции са числови.

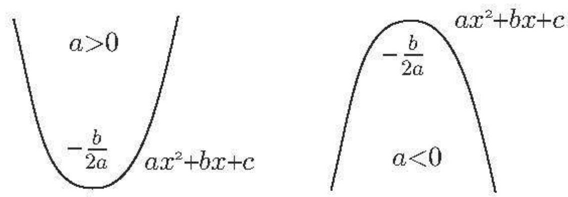
Ако $y = f(x)$ е една функция, за която множеството D е числово (то може да съвпада с множеството на реалните числа, да е определен интервал или друг вид множество от числа), то множеството от точки $(x, f(x))$ наричаме графика на функцията $f(x)$. Ако не е отбелязано нещо специално за D, приемаме, че D съвпада с множеството R на реалните числа. Свойствата на функцията и приближените ѝ стойности може да се определят от вида на нейната графика.

Функция, зададена чрез формулата $y = f(x) = kx + b$, наричаме **линейна функция**. Графиката на тази функция е права линия. В случаите, когато $k > 0$ линейната функция е растяща, при $k < 0$ – намаляваща, а при $k = 0$ е константна (постоянна) величина.



Функция от вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, се нарича **квадратна функция**. Графиката на тази функция е парабола. От представянето

$y = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$, където $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратния тричлен, получаваме, че при $a > 0$ функцията приема най-малка стойност при $x = -\frac{b}{2a}$ и съответно при $a < 0$, функцията приема най-голяма стойност при $x = -\frac{b}{2a}$.



Ако $a > 0$ функцията е намаляваща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и растяща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$ и обратно при $a < 0$, функцията е растяща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и намаляваща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$. Точката с координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ се нарича **връх на параболата.**

Системи уравнения

Ако за няколко уравнения търсим всички възможни стойности на неизвестните в тях, които удовлетворяват всяко от уравненията, казваме, че е зададена **система уравнения**.

Системи от вида $\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$, за които поне един от коефициентите във всяко от уравненията е ненулев, наричаме система линейни уравнения с две неизвестни x и y. Такива системи обикновено решаваме чрез заместване или чрез събиране.

Тъй като графиките на всяко от уравненията са прави линии, решенията на системата могат да се илюстрират като пресечни точки на двете графики и тогава говорим за графично решаване на системите.

Ако поне едно от уравненията в една система е от втора степен, то системата е от втора степен. Някои от тези системи се решават чрез заместване и събиране, като се прилагат теоремите за равносилност на системи уравнения.

Пример 1. Да се реши системата уравнения $\left| \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right.$.

Решение:

От първото уравнение изразяваме $y = 2x - 1$ и заместваме във второто, т.е. $x^2 - 4(2x-1)^2 + x + 3(2x-1) - 1 = 0$, откъдето $15x^2 - 23x + 8 = 0$. Последното уравнение има две решения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{8}{15}$, откъдето

8. Даден е $\triangle ABC$, в който $AC = 21$, $BC = 16$ и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Върху страните му AC и BC са взети съответно точките M и N така, че $CM = \dfrac{1}{7}CA$ и N е среда на BC. Намерете периметъра на четириъгълника $AMNB$.

9. Даден е триъгълник ABC, в който $AB = 7$ и $AC = 9$. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича страната BC в точката D така, че $AD = BD$. Намерете BC.

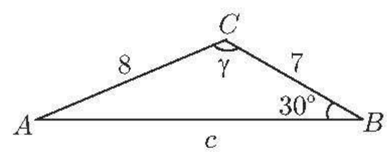
33 РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА. ОСНОВНИ ЗАДАЧИ

В този урок ще се научим да решаваме произволен триъгълник с използване на косинусова и синусова теорема.

Задача 1. За $\triangle ABC$ са дадени $a = 7$, $b = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Да се намерят c, $\sin\alpha$ и $\sin\gamma$.

Решение:

Косинусовата теорема се прилага, като се записва формулата за страната, лежаща срещу дадения ъгъл



$8^2 = 7^2 + c^2 - 2.7.c.\cos 30^\circ$

$c^2 - 7\sqrt{3}c - 15 = 0$

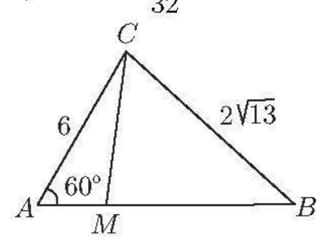
$c_{1,2} = \dfrac{7\sqrt{3} \pm 3\sqrt{23}}{2}$

$c_1 = \dfrac{7\sqrt{3} - 3\sqrt{23}}{2} < 0 \Rightarrow c_1$ не е решение. Следователно $c = \dfrac{7\sqrt{3} + 3\sqrt{23}}{2}$.

От синусовата теорема

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{7}{16}$, $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{(7\sqrt{3} + 3\sqrt{23})}{32}$.

Задача 2. За $\triangle ABC$ са дадени $AC = 6$, $BC = 2\sqrt{13}$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ако точка M е вътрешна за AB, такава, че $AM : MB = 1 : 3$, намерете дължината на CM.



Решение:

От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos 60^\circ$

$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + c^2 - 2.6.c.\dfrac{1}{2}$

$c^2 - 6c - 16 = 0.$

$c_{1,2} = 3 \pm 5, c_1 = 3 - 5 < 0$ и c_1 не е решение. Следователно $c = 8$ и $AM = 2$. От косинусовата теорема за $\triangle AMC$ намираме:
$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2.AC.AM.\dfrac{1}{2} \Rightarrow CM = 2\sqrt{7}$.

Задача 3. Триъгълник има страни a, b и c. Да се намери височината в триъгълника към страната c.

Решение:
От $\cos\alpha = \dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}, \sin\alpha = \dfrac{h_c}{b}$ и $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ получаваме, че
$\left(\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\dfrac{h_c}{b}\right)^2 = 1$, т.е. $(c^2+b^2-a^2)^2 + 4c^2h_c^2 = 4b^2c^2$,
$4c^2h_c^2 = 4b^2c^2 - (c^2+b^2-a^2)^2 = (2bc+c^2+b^2-a^2)(2bc-c^2-b^2+a^2) = ((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2) = (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$. Следователно
$h_c = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2c}$.

Задачи

1. Намерете страната c на триъгълник, в който $\alpha = 60^\circ$, $a = 10$ и $b = 6$.

2. За триъгълник е дадено $a = 7$, $b = 8$, $\cos\beta = \dfrac{11}{13}$. Намерете c и γ.

3. Намерете височината към най-голямата страна на триъгълник със страни с дължини:
а) 14, 15, 13; б) 2, 3, 4; в) 25, 12, 17.

4. Намерете радиуса на окръжността, описана около триъгълник със страни 5 cm, 6 cm и 7 cm.

5. За триъгълник ABC е дадено $a = 14$; $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$; $R = 25$. Намерете b и c.

6. Две от страните на триъгълник са a и b. Намерете третата му страна, ако тя е равна на радиуса на описаната около него окръжност.

7. Точката I е център на вписаната окръжност в триъгълника ABC, в който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Намерете AB, ако $AI = \dfrac{4\sqrt{21}}{3}$, $BI = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

8. Върху страната BC на триъгълника ABC е взета точка P така, че $CP = \dfrac{1}{4}CB$. Намерете страната BC, ако $AB = 6$, $AC = 4$ и $AP = 3$.

9. Точката I е център на вписаната в триъгълника ABC окръжност. Намерете $\sphericalangle ACB$, ако $AI = 15$, $BI = 12$, $AB = 3\sqrt{61}$.

10. Намерете страните на триъгълник, ако те са последователни естествени числа и средната по големина височина е $6\sqrt{2}$.

34 РЕШАВАНЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИЪГЪЛНИК С ПОМОЩТА НА КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА. УПРАЖНЕНИЕ

Задача 1. Да се докаже, че ако за дължините на отсечките a, b и c и мерките на ъглите α, β и γ са изпълнени равенствата

$$\left| \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array} \right. ,$$

то съществува триъгълник със страни a, b и c и ъгли α, β и γ.

Решение:

Тъй като $\cos\alpha \in [-1; 1]$ от равенството $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ следва, че

$$b^2 + c^2 - 2bc < b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha < b^2 + c^2 + 2bc,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc < a^2 < b^2 + c^2 + 2bc,$$

$$(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2,$$

$$|b-c| < a < b + c.$$

Аналогично $|a-c| < b < a + c$ и $|a-b| < c < a + b$. Следователно съществува триъгълник със страни a, b и c.

От косинусовата теорема следва, че ъглите на този триъгълник са α, β и γ.

Задача 2*. Да се докаже, че всяка една от дадените системи уравнения за елементите на един триъгълник следва от другите две.

$$\left| \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{array} \right. \text{ и } \left| \begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array} \right. .$$

*

Решение:

Нека е вярно, че $\left| \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array} \right.$. Тогава $\left| \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{array} \right.$ и

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = b\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a;$$