

Иван Тонов  
Ирина Шаркова  
Мария Христова  
Донка Капралова  
Веселин Златилов

# Математика

---

9 ■ клас



**РЕГАЛИЯ 6**

**Учебникът ще се ползва няколко години. Не пишете в него!**

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1176/09.05.2024 г.  
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:



обърнете внимание



исторически бележки



алгоритъм при решаване на някои задачи

\* —

повишена трудност

— \*

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,  
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2024 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2024 г.

© Николай Цачев, корица, 2024 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2024 г.

**ISBN 978-954-745-369-2**

# СЪДЪРЖАНИЕ

## Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра.....	7
Начален преговор. Геометрия.....	9

## Тема 1. Класическа вероятност

1. Комбинаторика. Преговор.....	15
2. Класическа вероятност.....	21
3. Класическа вероятност. Упражнение.....	27
4. Вероятност на сума на несъвместими събития.....	29
5. Вероятност на противоположно събитие, на обединение и сечение на събития.....	33
6. Вероятност на сума на съвместими събития.....	38
Задачи към тема 1.....	42
Контролен тест.....	46

## Тема 2. Функции

7. Функция. Дефиниционно множество.....	47
8. Начини на задаване на функция.....	51
9. Графика на функцията $y = ax$ . Свойства.....	55
10. Графика на линейната функция $y = ax + b$ .....	59
11. Свойства на линейната функция.....	64
12. Квадратна функция. Графика на функцията $y = ax^2$ .....	67
13. Графика на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c$ . Растене и намаляване на квадратна функция, най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция.....	72
14. Графика на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c$ . Упражнение.....	76
15. Графично представяне на решенията на уравнение.....	80
Задачи към тема 2.....	83
Контролен тест.....	86

## Тема 3. Системи линейни уравнения с две неизвестни

16. Линейни уравнения с две неизвестни.....	87
17. Взаимно разположение на графики на линейни функции.....	89
18. Системи линейни уравнения с две неизвестни. Графично представяне на решенията на системи линейни уравнения с две неизвестни.....	92
19. Решаване на системи линейни уравнения с две неизвестни чрез заместване и чрез събиране.....	95

20. Решаване на системи линейни уравнения с две неизвестни. Упражнение.....	98
21. Изследване броя на решенията на система линейни уравнения .....	101
22. Приложения на системи линейни уравнения .....	103
23. Моделиране със системи линейни уравнения.....	105
Задачи към тема 3 .....	108
Контролен тест .....	109
<b>Тема 4. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни</b>	
24. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни .....	111
25. Решаване на системи уравнения от втора степен с две неизвестни, на които едното уравнение е от първа степен .....	114
26. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни, на които едното уравнение е от първа степен. Упражнение .....	116
27. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен .....	117
28. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен. Упражнение .....	120
29. Моделиране със системи уравнения от втора степен с две неизвестни .....	122
Задачи към тема 4 .....	124
Контролен тест .....	126
<b>Тема 5. Подобни триъгълници</b>	
30. Пропорционални отсечки .....	127
31. Теорема на Талес. Обратна теорема на Талес .....	131
32. Теорема на Талес. Упражнение .....	137
33. Свойство на ъглополовящите в триъгълник .....	140
34. Свойство на ъглополовящите. Упражнение .....	144
35. Подобни триъгълници. Първи признак за подобност на триъгълници .....	148
36. Първи признак за подобност на триъгълници. Упражнение .....	152
37. Втори и трети признак за подобност на триъгълници .....	156
38. Признаци за подобност на триъгълници. Упражнение .....	159
39. Свойства на подобните триъгълници .....	162
40. Подобни триъгълници и окръжност. Упражнение .....	166
41. Отношение на лицата на подобните триъгълници .....	169
42. Отношение на лицата на подобните триъгълници. Упражнение .....	172

Задачи към тема 5 .....	174
Контролен тест .....	176
<b>Тема 6. Рационални неравенства</b>	
43. Обединение и сечение на числови интервали .....	179
44. Линейни неравенства с едно неизвестно. Преговор .....	181
45. Системи линейни неравенства с едно неизвестно .....	184
46. Системи линейни неравенства с едно неизвестно. Упражнение .....	187
47. Неравенства от вида $(ax + b)(cx + d) > 0$ и $(ax + b)(cx + d) < 0$ .....	189
48. Квадратни неравенства. Метод на интервалите .....	192
49. Квадратни неравенства .....	195
50. Квадратни неравенства. Упражнение .....	197
51. Приложение на метода на интервалите при решаване на неравенства от по-висока степен .....	200
52. Дробни неравенства .....	203
53. Моделиране с неравенства .....	205
Задачи към тема 6 .....	207
Контролен тест .....	209
<b>Тема 7. Метрични зависимости между отсечки</b>	
54. Метрични зависимости между отсечки в правоъгълен триъгълник .....	210
55. Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник. Упражнение .....	214
56. Теорема на Питагор .....	216
57. Теорема на Питагор. Упражнение .....	220
58. Намиране на дължини на отсечки в правоъгълна координатна система .....	223
59. Решаване на правоъгълен триъгълник .....	226
60. Правоъгълен триъгълник. Упражнение .....	229
61. Решаване на равнобедрен триъгълник .....	232
62. Равнобедрен триъгълник. Упражнение .....	234
63. Решаване на равнобедрен трапец .....	237
64. Намиране на елементи на правоъгълен трапец. Упражнение .....	240
65. Решаване на успоредник .....	243
66. Успоредник. Упражнение .....	245
67. Метрични зависимости между отсечки в окръжност .....	248
68. Метрични зависимости в окръжност. Упражнение .....	251

Задачи към тема 7 .....	254
Контролен тест .....	256
<b>Тема 8. Тригонометрични функции на остър ъгъл</b>	
69. Тригонометрични функции на остър ъгъл .....	258
70. Стойности на тригонометрични функции на ъгли с мерки 30°, 45°, 60° .....	262
71. Основни зависимости между тригонометричните функции на един и същ ъгъл .....	264
72. Тригонометрични функции на остри ъгли, които се допълват до 90° .....	267
73. Намиране на основните елементи на правоъгълен триъгълник .....	269
74. Намиране елементи на равнобедрен триъгълник .....	272
75. Намиране елементи на равнобедрен и правоъгълен трапец .....	274
76. Приложение на тригонометрични функции на остър ъгъл .....	277
Задачи към тема 8 .....	280
Контролен тест .....	281
<b>Тема. Годишен преговор</b>	
Годишен преговор. Алгебра .....	283
Годишен преговор. Геометрия .....	287
<b>Отговори на задачите</b> .....	290

## НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

**Квадратен корен**

Числото  $\sqrt{a}$  съществува при  $a \geq 0$  и за него е изпълнено  $\sqrt{a} \geq 0$  и  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

Свойства на квадратните корени:

- за всяко число  $a$  е вярно равенството  $\sqrt{a^2} = |a|$ ;
- ако  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , то  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ;
- ако  $a \geq 0$  и  $b > 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;
- ако  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и  $a \leq b$ , то  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ ;

За рационализиране на знаменателя на дроб се използват формулите:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$  за всяко  $a > 0$ ;
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ , за всяко  $a > 0, b > 0$ .

**Квадратни уравнения**

Уравнение от вида  $ax^2 + bx + c = 0$  при  $a \neq 0$ , където  $x$  е неизвестно и  $a, b$  и  $c$  са реални числа, се нарича квадратно уравнение.

Корените на квадратното уравнение се намират по формулата

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ където } D = b^2 - 4ac:$$

- ако  $D > 0$ , уравнението има два различни корена;
- ако  $D = 0$ , уравнението има два равни корена (един двоен корен);
- ако  $D < 0$ , уравнението няма реални корени.

Ако коефициентът  $b = 2k$ , то корените на квадратното уравнение могат да се намерят и по формулата  $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ .

Числата  $x_1$  и  $x_2$  са корени на квадратното уравнение  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , тогава и само тогава, когато  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  и  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$  (формули на Виет).

Необходимо и достатъчно условие уравнението  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , да има:

- два положителни корена е  $D \geq 0, x_1x_2 > 0$  и  $x_1 + x_2 > 0$ ;
- два отрицателни корена е  $D \geq 0, x_1x_2 > 0$  и  $x_1 + x_2 < 0$ ;

- два корена с различни знаци е  $x_1 x_2 < 0$ .
- Ако квадратното уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ :
- има корени  $x_1$  и  $x_2$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ;
- няма реални корени, то  $ax^2 + bx + c$  е неразложим.

### Рационални изрази

Рационален израз, който съдържа променлива в знаменател се нарича дробен израз.

Допустимите стойности на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.

Частното на два цели рационални изрази се нарича рационална дроб.

Ако  $\frac{A}{B}$  е рационална дроб и  $C$  е израз, различен от 0, то  $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$  (основно свойство на рационалната дроб).

Ако  $A, B, C$  и  $D$  са рационални изрази, то в сила са правилата за действия с рационални дроби:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0; \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, B \neq 0, D \neq 0;$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Уравнение, което съдържа неизвестното в знаменател се нарича дробно уравнение.

Дефиниционната област на дробното уравнение е общата дефиниционна област на участващите в него изрази.

Дробно уравнение решаваме като го преобразуваме в цяло уравнение, на което намираме корените и проверяваме дали те са от дефиниционната област на даденото уравнение.

---

## Задачи

---

1. Да се опрости изказа:

а)  $\sqrt{5\frac{1}{16}} + \sqrt{54} - \sqrt{600}$ ; б)  $\frac{3\sqrt{15} - \sqrt{135}}{\sqrt{3}}$ ; в)  $(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})^2$ .

2. Да се рационализира знаменателят на дробта:

а)  $\frac{7}{\sqrt{21}}$ ; б)  $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt{7} - 2}$ ; г)  $\frac{11}{3\sqrt{5} + 1}$ ; д)  $\frac{67}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$ .

3. Да се докаже равенството:

а)  $\sqrt{4,11} - \sqrt{0,0121} = 2$ ; б)  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$ ;  
 в)  $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 5\sqrt{6} - 11$ ; г\*)  $\frac{20}{\sqrt{34 - 6\sqrt{21}}} + \frac{20}{3\sqrt{3} + \sqrt{7}} = 6\sqrt{3}$ .



4. Да се реши уравнението:

а)  $2x^2 - 9x - 5 = 0$ ; б)  $4x^2 - 8x + 3 = 0$ ;

в)  $2x^2 + x + 5 = 0$ ; г)  $14x - 49x^2 - 1 = 0$ ;

д)  $|3x^2 - x - 1| = 3$ ; е)  $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 = 2x(1 - x)^2$ .

5. Да се реши чрез полагане уравнението:

а)  $x^4 - x^2 - 12 = 0$ ; б)  $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) = 15$ ; в)  $4x^2 + |x| = 5$ .

6. Да се съкрати дробта:

а)  $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 9x + 8}$ ; б)  $\frac{x^2 + 6x - 91}{49 - x^2}$ ; в)  $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 - 12x^2 + 27}$ .

7. Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $2x^2 + 5x - 4 = 0$  да се пресметне:

а)  $3x_1 + 3x_2 - x_1x_2$ ; б)  $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ ; в)  $x_1^2 + x_2^2$ ; г)  $\frac{x_2}{1 + \frac{x_2}{x_1}}$ .

8. Да се определи колко положителни и колко отрицателни корена има уравнението:

а)  $x^2 - 6x - 4 = 0$ ; б)  $2x^2 + 5x + 1 = 0$ ; в)  $4x^2 - 15x + 1 = 0$ .

9. Да се определи множеството от допустимите стойности на израза:

а)  $\left(\frac{1}{2x-2} + \frac{3x}{x^2-1}\right) : (x+2)$ ; б)  $\frac{x-3}{x+2} : \frac{x^2-9}{3x}$ ; в)  $\frac{3}{2x^2-3x} : \frac{x^2+1}{3x^2+5x+2}$ .

10. Да се извършат действията:

а)  $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2+2x+3}{x+2-x^2}$ ; б)  $\frac{x+5}{y-3} : \frac{x^2+4x-5}{y^2-9}$ .

11. Да се реши дробното уравнение:

а)  $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}$ ; б)  $\frac{x+4}{x+2} - \frac{3}{x+4} = \frac{6}{x^2+6x+8}$ ;

в)  $\left(\frac{x^2}{x-1} + 1\right)^2 - 9\left(\frac{x^2}{x-1} + 1\right) = 10$ ; г)  $\frac{1}{x+2} - \frac{8}{x^3-4x} = \frac{x}{2x-x^2}$ .

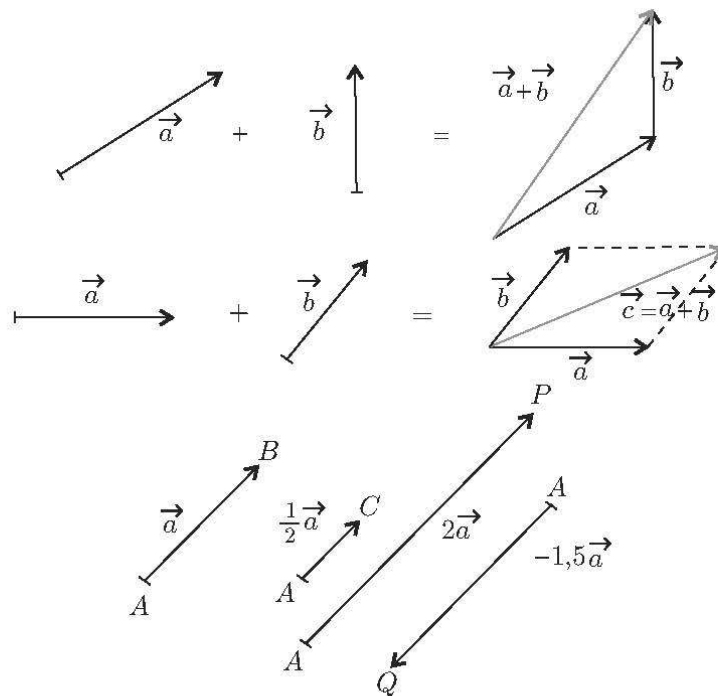
---

## НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. ГЕОМЕТРИЯ

---

### Насочени отсечки и вектори

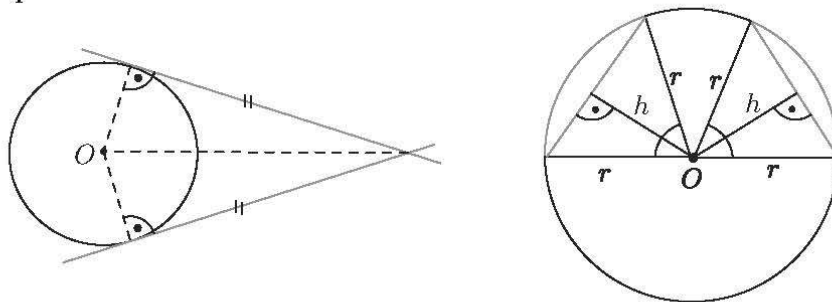
Насочените отсечки имат определени начало, край и посока. Множество от равни помежду си насочени отсечки е вектор. Може да събираме и изваждаме векторите, а също и да ги умножаваме с числа. Свойствата на тези действия с векторите са подобни на свойствата на действията с числа.



### Взаимни положения на прави, отсечки, ъгли и окръжности

Ако права и окръжност имат само една обща точка, правата е допирателна към окръжността в тази точка. Необходимо и достатъчно условие за това е правата да е перпендикулярна на радиуса на окръжността в допирната точка.

През външна за дадена окръжност точка съществуват две допирателни прави към окръжността. Допирателните отсечки от тази точка до окръжността са равни.



Две дъги от една окръжност са равни, точно тогава, когато съответните им хорди са равни.

Две хорди в една окръжност са равни точно тогава, когато са на равни разстояния от центъра на окръжността.

Диаметърът на окръжност е перпендикулярен на хорда от същата окръжност, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато той:

## 67

## МЕТРИЧНИ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ОТСЕЧКИ В ОКРЪЖНОСТ

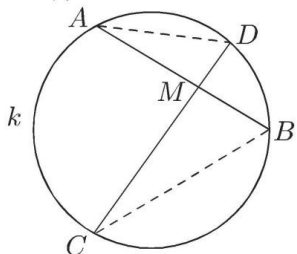
В този урок ще докажем важни метрични зависимости за хорди от окръжност.

### Теорема 1

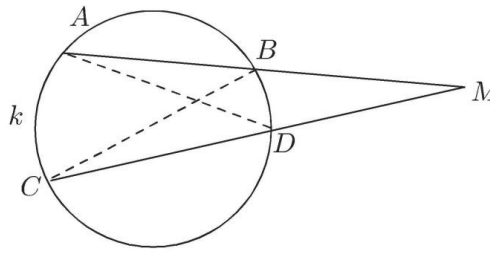
Ако  $AB$  и  $CD$  са хорди в окръжността  $k$  и  $M$  е пресечната им точка (пресечната точка на правите, определени от тези хорди), то  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

**Дадено:**  $k$ ,  $AB$  и  $CD$  – хорди,  $AB \cap CD = M$ .

**Да се докаже:**  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .



а)



б)

**Доказателство:**

**I случай:** Точката  $M$  е вътрешна за окръжността. Разглеждаме  $\triangle AMD$  и  $\triangle BMC$ .

От  $\sphericalangle CMB = \sphericalangle AMD$  (върхни) и

$\sphericalangle BCM = \sphericalangle DAM = \frac{\widehat{BD}}{2}$  (вписани ъгли в  $k$ )

следва, че  $\triangle AMD \sim \triangle CMB \Rightarrow$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

**II случай:** Точката  $M$  е външна за окръжността. Разглеждаме  $\triangle AMD$  и  $\triangle CMB$ .

От  $\sphericalangle CMB = \sphericalangle AMD$  – общ и

$\sphericalangle MAD = \sphericalangle MCB = \frac{\widehat{DB}}{2}$  (вписани ъгли в  $k$ )

следва, че  $\triangle AMD \sim \triangle CMB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD,$

с което твърдението е доказано.