Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

9. клас

РЕГАЛИЯ 6

**Учебникът е одобрен със заповед РД09-1176/09.05.2024 г.
на министъра на образованието и науката**

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— повишена трудност ——— *

ISBN 978-954-745-369-2

СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Квадратен корен

Числото $\sqrt{a}$ съществува при $a \geqq 0$ и за него е изпълнено $\sqrt{a} \geqq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.
Свойства на квадратните корени:
- за всяко число a е вярно равенството $\sqrt{a^2} = |a|$;
- ако $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- ако $a \geqq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- ако $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ и $a \leqq b$, то $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b}$;

За рационализиране на знаменателя на дроб се използват формулите:
- $\sqrt{a}.\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ за всяко $a > 0$;
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, за всяко $a > 0, b > 0$.

Квадратни уравнения

Уравнение от вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$, където x е неизвестно и a, b и c са реални числа, се нарича квадратно уравнение.

Корените на квадратното уравнение се намират по формулата
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, където $D = b^2 - 4ac$:
- ако $D > 0$, уравнението има два различни корена;
- ако $D = 0$, уравнението има два равни корена (един двоен корен);
- ако $D < 0$, уравнението няма реални корени.

Ако коефициентът $b = 2k$, то корените на квадратното уравнение могат да се намерят и по формулата $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Числата x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тогава и само тогава, когато $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (формули на Виет).

Необходимо и достатъчно условие уравнението $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, да има:
- два положителни корена е $D \geqq 0$, $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 > 0$;
- два отрицателни корена е $D \geqq 0$, $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 0$;

• два корена с различни знаци е $x_1x_2 < 0$.

Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

• има корени x_1 и x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

• няма реални корени, то $ax^2 + bx + c$ е неразложим.

Рационални изрази

Рационален израз, който съдържа променлива в знаменател се нарича дробен израз.

Допустимите стойности на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.

Частното на два цели рационални израза се нарича рационална дроб.

Ако $\dfrac{A}{B}$ е рационална дроб и C е израз, различен от 0, то $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A.C}{B.C}$ (основно свойство на рационалната дроб).

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в сила са правилата за действия с рационални дроби:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0; \quad \frac{A}{B}.\frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}, B \neq 0, D \neq 0;$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A.D}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Уравнение, което съдържа неизвестното в знаменател се нарича дробно уравнение.

Дефиниционната област на дробното уравнение е общата дефиниционна област на участващите в него изрази.

Дробно уравнение решаваме като го преобразуваме в цяло уравнение, на което намираме корените и проверяваме дали те са от дефиниционната област на даденото уравнение.

Задачи

1. Да се опрости израза:

а) $\sqrt{5\frac{1}{16}} + \sqrt{54} - \sqrt{600}$; б) $\dfrac{3\sqrt{15} - \sqrt{135}}{\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})^2$.

2. Да се рационализира знаменателят на дробта:

а) $\dfrac{7}{\sqrt{21}}$; б) $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - 2}$; г) $\dfrac{11}{3\sqrt{5} + 1}$; д) $\dfrac{67}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

3. Да се докаже равенството:

а) $\sqrt{4,11 - \sqrt{0,0121}} = 2$; б) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$;

в) $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 5\sqrt{6} - 11$; г*) $\dfrac{20}{\sqrt{34 - 6\sqrt{21}}} + \dfrac{20}{3\sqrt{3} + \sqrt{7}} = 6\sqrt{3}$.

4. Да се реши уравнението:
а) $2x^2 - 9x - 5 = 0$; б) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
в) $2x^2 + x + 5 = 0$; г) $14x - 49x^2 - 1 = 0$;
д) $|3x^2 - x - 1| = 3$; е) $(x+1)^3 + (x+2)^3 = 2x(1-x)^2$.

5. Да се реши чрез полагане уравнението:
а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; б) $(x^2+2x)^2 - 14(x^2+2x) = 15$; в) $4x^2 + |x| = 5$.

6. Да се съкрати дробта:
а) $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$; б) $\dfrac{x^2+6x-91}{49-x^2}$; в) $\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^4-12x^2+27}$.

7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2+5x-4=0$ да се пресметне:
а) $3x_1 + 3x_2 - x_1x_2$; б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $\dfrac{x_2}{1+\dfrac{x_2}{x_1}}$.

8. Да се определи колко положителни и колко отрицателни корена има уравнението:
а) $x^2 - 6x - 4 = 0$; б) $2x^2 + 5x + 1 = 0$; в) $4x^2 - 15x + 1 = 0$.

9. Да се определи множеството от допустимите стойности на израза:
а) $\left(\dfrac{1}{2x-2} + \dfrac{3x}{x^2-1}\right) : (x+2)$; б) $\dfrac{x-3}{x+2} : \dfrac{x^2-9}{3x}$; в) $\dfrac{3}{2x^2-3x} : \dfrac{x^2+1}{3x^2+5x+2}$.

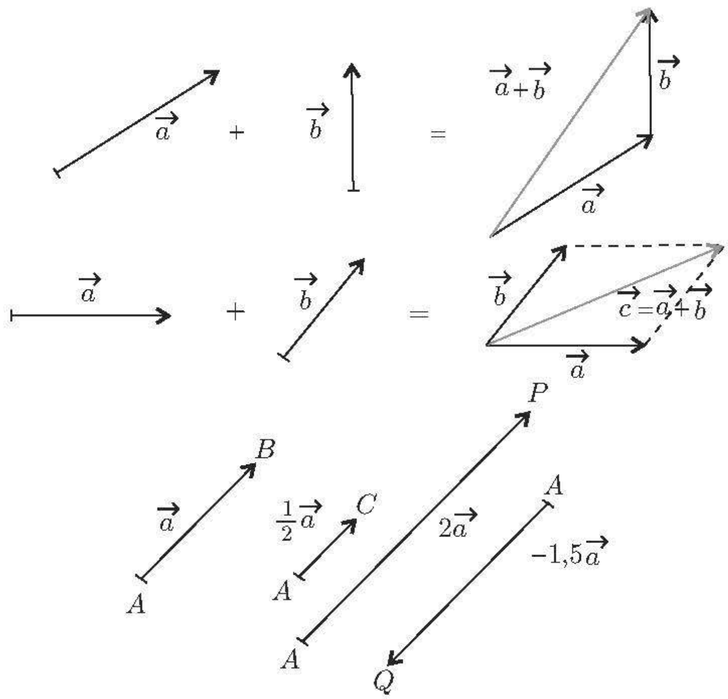
10. Да се извършат действията:
а) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x^2+2x+3}{x+2-x^2}$; б) $\dfrac{x+5}{y-3} : \dfrac{x^2+4x-5}{y^2-9}$.

11. Да се реши дробното уравнение:
а) $\dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+2}$; б) $\dfrac{x+4}{x+2} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{6}{x^2+6x+8}$;
в) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}+1\right)^2 - 9\left(\dfrac{x^2}{x-1}+1\right) = 10$; г) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{8}{x^3-4x} = \dfrac{x}{2x-x^2}$.

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. ГЕОМЕТРИЯ

Насочени отсечки и вектори

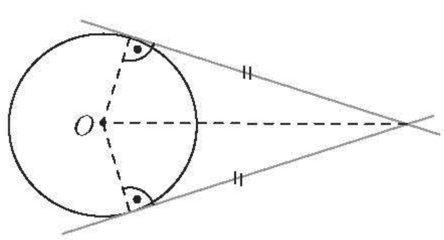
Насочените отсечки имат определени начало, край и посока. Множество от равни помежду си насочени отсечки е вектор. Може да събираме и изваждаме векторите, а също и да ги умножаваме с числа. Свойствата на тези действия с векторите са подобни на свойствата на действията с числа.

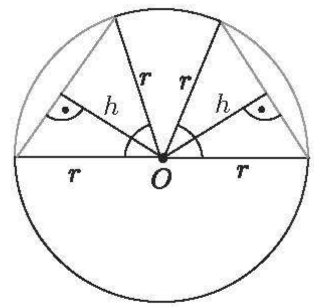


Взаимни положения на прави, отсечки, ъгли и окръжности

Ако права и окръжност имат само една обща точка, правата е допирателна към окръжността в тази точка. Необходимо и достатъчно условие за това е правата да е перпендикулярна на радиуса на окръжността в допирната точка.

През външна за дадена окръжност точка съществуват две допирателни прави към окръжността. Допирателните отсечки от тази точка до окръжността са равни.





Две дъги от една окръжност са равни, точно тогава, когато съответните им хорди са равни.

Две хорди в една окръжност са равни точно тогава, когато са на равни разстояния от центъра на окръжността.

Диаметърът на окръжност е перпендикулярен на хорда от същата окръжност, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато той:

67 МЕТРИЧНИ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ОТСЕЧКИ В ОКРЪЖНОСТ

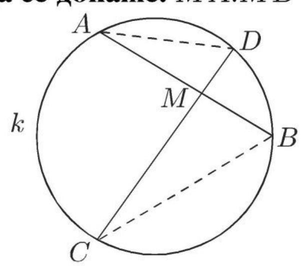
В този урок ще докажем важни метрични зависимости за хорди от окръжност.

Теорема 1

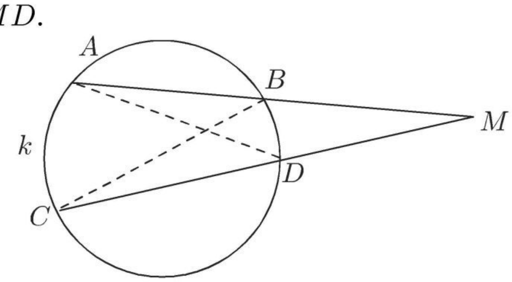
Ако AB и CD са хорди в окръжността k и M е пресечната им точка (пресечната точка на правите, определени от тези хорди), то $MA.MB = MC.MD$.

Дадено: k, AB и CD – хорди, $AB \cap CD = M$.

Да се докаже: $MA.MB = MC.MD$.



а)



б)

Доказателство:

I случай: Точката M е вътрешна за окръжността. Разглеждаме $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$.

От $\sphericalangle CMB = \sphericalangle AMD$ (връхни) и

$\sphericalangle BCM = \sphericalangle DAM = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ (вписани ъгли в k)

следва, че $\Delta AMD \sim \Delta CMB \Rightarrow$

$\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD.$

II случай: Точката M е външна за окръжността. Разглеждаме $\triangle AMD$ и $\triangle CMB$.

От $\sphericalangle CMB = \sphericalangle AMD$ – общ и

$\sphericalangle MAD = \sphericalangle MCB = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2}$ (вписани ъгли в k)

следва, че $\Delta AMD \sim \Delta CMB \Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD,$

с което твърдението е доказано.