

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

1. Входно ниво. Тест с решения	6
2. Входно ниво. Тест № 1	10
Тест № 2	11
Указания за решаване на тестовете, дадени в този учебник	12

ТЕМА 1. СТАТИСТИКА

3. Групиране на данни	14
4. Хистограма и полигон	20
5. Таблица и графично представяне на акумулираните честоти	26
6. Средна аритметична стойност. Преговор с допълнение	32
7. Характеристики на разсейването	36
8. Характеристики на разсейването. Упражнение	42
9. Вероятност и статистическа честота.	46
10. Оценяване на неизвестен дял в генерална съвкупност чрез извадки	50
11. Оценяване на неизвестен дял в генерална съвкупност чрез извадки. Упражнение....	54
12. Практически задачи. Упражнение.....	58

ТЕМА 2. УРАВНЕНИЯ

13. Модулни уравнения от вида $ ax^2 + bx + c = m$	66
14. Основни показателни уравнения.....	70
15. Показателни уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни уравнения....	76
16. Показателни уравнения. Упражнение.....	80
17. Основни логаритмични уравнения	84
18. Основни логаритмични уравнения. Упражнение	88
19. Логаритмични уравнения, свеждащи се чрез полагане до квадратни	92
20. Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$	96

21. Решаване на уравнения от вида $\cos x = a$	102
22. Решаване на уравнения от вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$. Упражнение.....	108
23. Решаване на основни тригонометрични уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{cotg} x = a$	114
24. Тригонометрични уравнения, които се свеждат до квадратни	120
25. Тригонометрични уравнения, които се свеждат до квадратни. Упражнение	126
26. Тригонометрични уравнения. Упражнение	132
27. Приложение на тригонометрията за решаване на геометрични задачи.	138
28. Обобщение на темата „Уравнения“	144
29. Тестове върху темата „Уравнения“ Тест № 1	151
Тест № 2	152

ТЕМА 3. НЕРАВЕНСТВА

30. Модулни неравенства от вида $ ax^2 + bx + c < (>) m$	154
31. Модулни неравенства от вида $ ax^2 + bx + c < (>) m$. Упражнение	160
32. Иррационални неравенства от вида $\sqrt{ax^2 + bx + c} < mx + n$ ($\sqrt{f(x)} < g(x)$) .	168
33. Иррационални неравенства от вида $\sqrt{ax^2 + bx + c} > mx + n$ ($\sqrt{f(x)} > g(x)$) .	174
34. Иррационални неравенства. Упражнение	180
35. Основни показателни неравенства	184
36. Показателни неравенства. Упражнение	188
37. Основни логаритмични неравенства	194
38. Логаритмични неравенства. Упражнение	200
39. Обобщение на темата „Неравенства“	206
40. Тестове върху темата „Неравенства“ Тест № 1	213
Тест № 2	214

ТЕМА 4. ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ

41. Линейна и квадратна функция. Най-голяма и най-малка стойност.....	216
42. Основни елементарни неравенства.....	222
43. Основни елементарни неравенства. Упражнение	228
44. Екстремални задачи в алгебрата	232
45. Екстремални задачи в планиметрията ..	236
46. Екстремални задачи в планиметрията. Упражнение	242
47. Практически задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на елементарни функции	248
48. Графични модели при решаване на екстремални задачи	254
49. Обобщение на темата „Екстремални задачи“	258

ИЗХОДНО НИВО

50. Статистика. Преговор.....	266
51. Уравнения. Преговор.....	270
52. Неравенства. Преговор.....	274
53. Екстремални задачи. Преговор.....	278
54. Изходно ниво. Тест с решения	282
55. Изходно ниво Тест № 1.....	288
Тест № 2.....	289

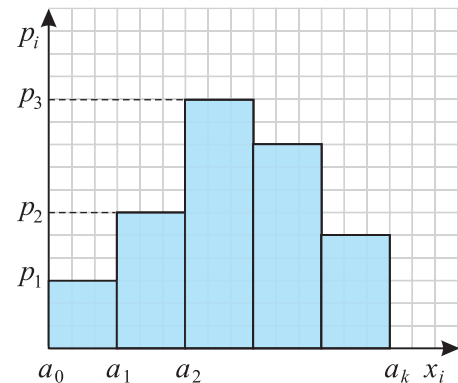
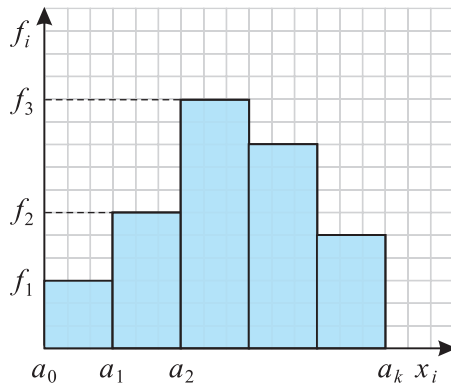
ОТГОВОРИ	290
-----------------------	-----

За нагледното представяне на данните голямо значение има графичното им представяне. Хистограмата и полигонът могат да се построят както за абсолютните честоти, така и за относителните. Принципът за построяване е един и същ и зависи какво отбелязваме по ординатната ос: дали това са абсолютните, или относителните честоти. Хистограмата описва формата на разпределението на данните с долепени един до друг правоъгълници, а полигонът – с начупена линия. Диаграмите с относителни честоти имат предимство, когато сравняваме данните от две извадки с различен обем.

Хистограма

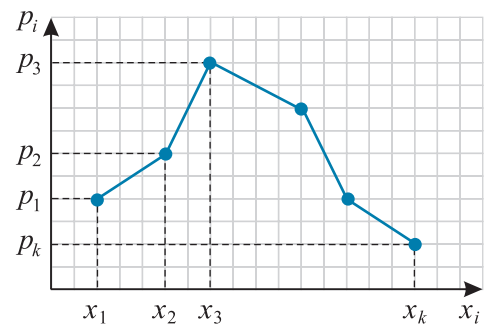
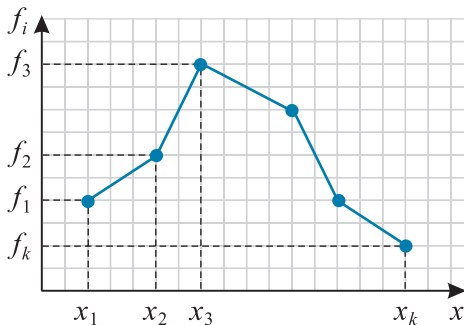
Тази диаграма се препоръчва при графично представяне на интервален статистически ред. По абсисната ос се означават краищата на интервалите на групите (груповите интервали), като дължината на всеки интервал се приема за единица. Над всеки от тях се построява правоъгълник с височина, равна на честотата в този интервал.

- При хистограма на абсолютните честоти лицето на i -тия правоъгълник е равно на f_i , а сумата от лицата на всички правоъгълници – на n .
- При хистограма на относителните честоти лицето на i -тия правоъгълник е равно на p_i , а сумата от лицата на всички правоъгълници – на 1.



Полигон

- Полигонът на абсолютните честоти е точкова диаграма, при която точките с координати $(x_i; f_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, се свързват последователно с отсечки, така че да се получи начупена линия.
- Полигонът на относителните честоти е точкова диаграма, при която точките с координати $(x_i; p_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, се свързват последователно с отсечки, така че да се получи начупена линия.





Когато построяваме полигон на данни, представени в интервален статистически ред, x_i е средата на интервала $[a_{i-1}; a_i)$, т.е. $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$.

Едно от преимуществата на полигона е възможността да се представят едновременно две и повече разпределения на една диаграма, за да бъдат сравнени.

ЗАДАЧА 1

Направена е извадка за престоя (в дни) в болница на 25 пациенти по определена диагноза „А“. Получените данни са посочени в таблицата в реда, по който са събрани.

9	5	6	7	8	9	7	7	5	5	6	8	8
4	6	4	5	6	7	8	6	7	4	6	6	

Намерете абсолютните и относителните честоти и ги представете таблично и графично.

Решение:

1. Различните стойности на x са 4, 5, 6, 7, 8 и 9.
2. Разпределяме данните по групи, като последователно отбелязваме с чертичка всяка преброена стойност.
3. Абсолютните честоти намираме, като преброим чертичките във всяка от групите.

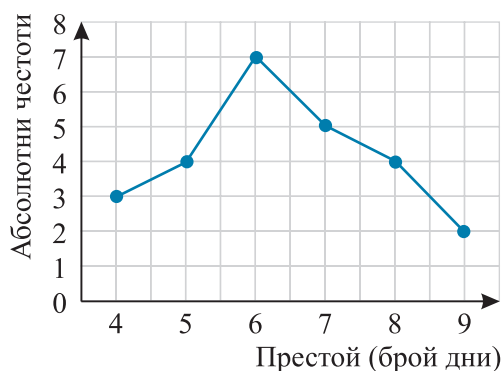
№	x_i		f_i	p_i
1	4		3	0,12
2	5		4	0,16
3	6		7	0,28
4	7		5	0,20
5	8		4	0,16
6	9		2	0,08
	Сума:		25	1

4. Относителните честоти пресмятаме по формулата

$$p_i = \frac{f_i}{n}, i = 1, 2, \dots, 6, n = 25.$$

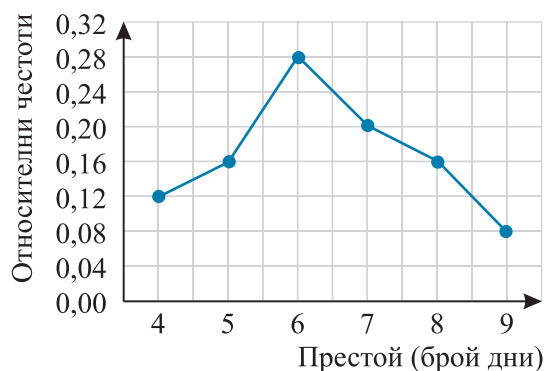
5. Построяваме полигоните на абсолютните и относителните честоти.

- Полигонът на абсолютните честоти получаваме, като последователно свържем точките (4; 3), (5; 4), (6; 7), (7; 5), (8; 4), (9; 2) с отсечки, така че да се получи начупена линия.



От полигона на абсолютните честоти веднага виждаме, че от всички пациенти най-много (7) са тези с престой 6 дни.

- Полигонът на относителните честоти получаваме, като последователно свържем точките (4; 0,12), (5; 0,16), (6; 0,28), (7; 0,20), (8; 0,16), (9; 0,08) с отсечки, така че да се получи начупена линия.



От полигона на относителните честоти отчитаме, че делът на пациентите с престой 6 дни е 0,28 (или 28%).

ЗАДАЧА 2

На конкурсен изпит се явили 350 кандидати. Получените от тях оценки са отразени в таблицата.

Оценка	2	3	4	5	6
Брой мъже	20	54	66	38	22
Брой жени	12	30	54	36	18

За всеки от половете намерете абсолютните и относителните честоти и ги представете в честотни таблици. На една диаграма постройте полигоните за двете групи от данни.

Решение:

1. Построяваме честотни таблици за двете групи.

- Мъже

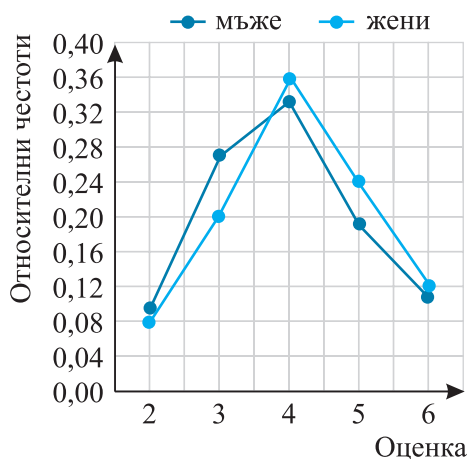
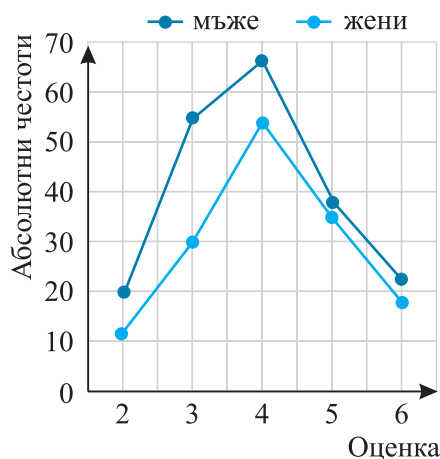
№	x_i	f_i	p_i
1	2	20	0,10
2	3	54	0,27
3	4	66	0,33
4	5	38	0,19
5	6	22	0,11
	Сума	200	1

- Жени

№	x_i	f_i	p_i
1	2	12	0,08
2	3	30	0,20
3	4	54	0,36
4	5	36	0,24
5	6	18	0,12
	Сума	150	1,00

2. Построяваме полигоните на абсолютните и относителните честоти.

- Полигони на абсолютните честоти
- Полигони на относителните честоти



3. При сравняването на полигоните на абсолютните честоти се вижда, че полигоните на оценките при двата пола са приблизително с еднаква форма. Например най-голям брой от кандидатите и от двата пола са получили оценка „добър 4“, а най-малък брой – „слаб 2“. От полигоните на абсолютните честоти не може да се определи кой от половете се е справил по-добре на изпита.

При сравняването на полигоните на относителните честоти се вижда, че относителните честоти на жените при по-ниските оценки са по-малки, а при по-високите са по-големи от тези на мъжете. Можем да заключим, че резултатите на жените са по-добри от тези на мъжете.

ЗАДАЧА 3

Индивидуалните заплати (в лв.) в цех през месец януари на произволно взети 50 служители са дадени в таблицата.

800	840	900	960	1 000	1 200	1 600	1 440	1 320	1 150
880	960	1 250	1 340	1 520	1 480	985	1 080	1 120	1 230
940	860	1 200	1 150	1 050	1 120	980	840	1 520	1 370
1 000	1 120	1 190	1 210	1 320	1 420	1 350	980	1 060	1 120
1 250	1 080	1 060	1 020	1 150	1 180	1 420	1 180	1 220	1 100

Групирайте данните в интервален статистически ред, като използвате 8 групи. Постройте хистограма и полигон на абсолютните и на относителните честоти.

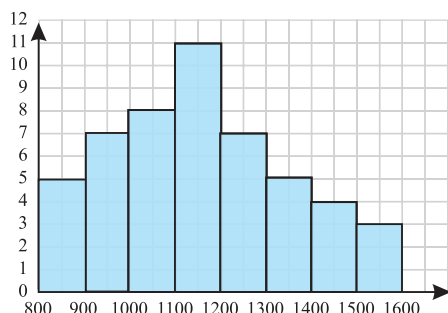
Решение:

1. Най-малката стойност е $x_{\min} = 800$, а най-голямата – $x_{\max} = 1\,600$.
2. Ширината на всеки от груповите интервали е $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{1\,600 - 800}{8} = 100$.
3. Определяме груповите интервали.
 $[800; 900)$, $[900; 1\,000)$, $[1\,000; 1\,100)$, $[1\,100; 1\,200)$,
 $[1\,200; 1\,300)$, $[1\,300; 1\,400)$, $[1\,400; 1\,500)$, $[1\,500; 1\,600]$
4. Намираме средите на груповите интервали $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, $i = 1, \dots, 8$.
 $x_1 = \frac{800 + 900}{2} = 850$, $x_2 = \frac{900 + 1\,000}{2} = 950$, \dots , $x_8 = \frac{1\,500 + 1\,600}{2} = 1\,550$
5. Разпределяме данните по групи, като последователно отбелязваме с чертичка всяка преброена стойност.
6. Като преброим чертичките във всяка от групите, намираме абсолютните честоти.
7. Относителните честоти пресмятаме по формулата $p_i = \frac{f_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, $n = 50$.
8. Получаваме честотната таблица.

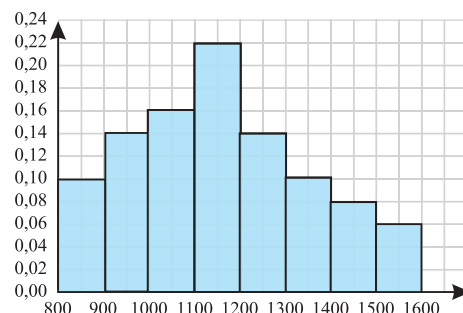
№	Групов интервал	Преброяване	Среда на интервала	Абсолютна честота	Относителна честота
i	$[a_{i-1}; a_i)$		x_i	f_i	p_i
1	$[800; 900)$	###	850	5	0,10
2	$[900; 1\,000)$	###	950	7	0,14
3	$[1\,000; 1\,100)$	###	1 050	8	0,16
4	$[1\,100; 1\,200)$	###	1 150	11	0,22
5	$[1\,200; 1\,300)$	###	1 250	7	0,14
6	$[1\,300; 1\,400)$	###	1 350	5	0,10
7	$[1\,400; 1\,500)$		1 450	4	0,08
8	$[1\,500; 1\,600]$		1 550	3	0,06
	Сума			50	1

9. Построяваме хистограмите на абсолютните и на относителните честоти.

- Хистограма на абсолютните честоти



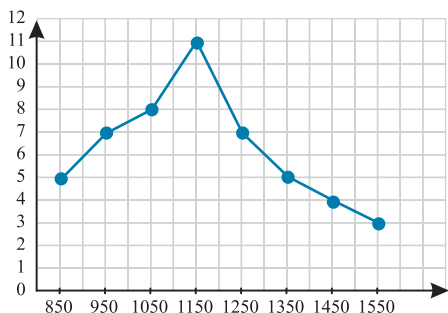
- Хистограма на относителните честоти



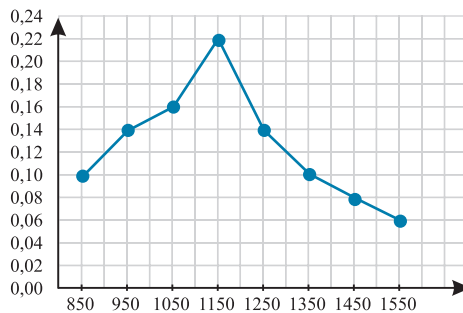
Хистограмите на абсолютните и на относителните честоти не се различават на външен вид. Първата показва колко данни попадат във всеки от групите интервали, а втората – какъв дял от данните попадат във всеки от интервалите.

10. Построяваме полигоните на абсолютните и на относителните честоти.

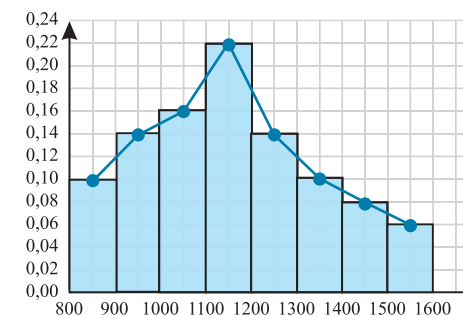
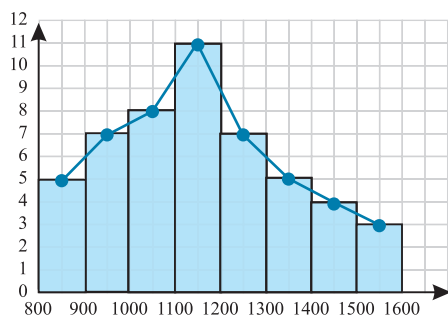
- Полигонът на абсолютните честоти получаваме, като последователно свържем точките $(x_i; f_i)$, $i=1, 2, \dots, 8$, с отсечки, така че да се получи начупена линия.



- Полигонът на относителните честоти получаваме, като последователно свържем точките $(x_i; p_i)$, $i=1, 2, \dots, 8$, с отсечки, така че да се получи начупена линия.



Полигоните на абсолютните и на относителните честоти могат да се получат много лесно, ако вече са построени съответните хистограми. Достатъчно е да се поставят средни точки (среди) на горните страни на правоъгълниците на хистограмата и те да се свържат.



ЗАДАЧА 4

Броят на работниците в един цех, работещи на еднотипни машини, според трудовия им стаж в години е даден в таблицата.

Трудов стаж (в години)	[0; 6)	[6; 12)	[12; 18)	[18; 24)	[24; 30]
Брой работници	16	24	20	12	8

Намерете абсолютните и относителните честоти и ги представете в честотна таблица. Постройте хистограма и полигон (на една графика) на абсолютните и на относителните честоти.

Решение:

1. Намираме средите на груповите интервали $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, $i = 1, \dots, 5$.

$$x_1 = \frac{0+6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{6+12}{2} = 9, \quad x_3 = \frac{12+18}{2} = 15, \quad x_4 = \frac{18+24}{2} = 21, \quad x_5 = \frac{24+30}{2} = 27.$$

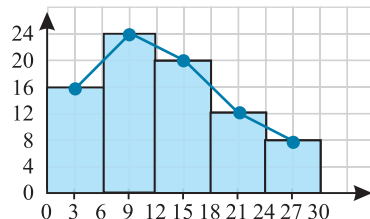
2. Относителните честоти пресмятаме по формулата $p_i = \frac{f_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, 5$, $n = 80$.

3. Получаваме честотната таблица.

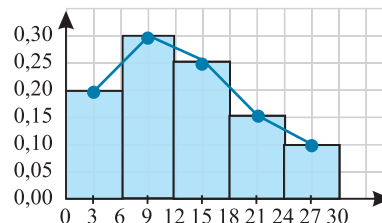
№	Групов интервал	Среда на интервала	Абсолютна честота	Относителна честота
i	$[a_{i-1}; a_i)$	x_i	f_i	p_i
1	[0; 6)	3	16	0,20
2	[6; 12)	9	24	0,30
3	[12; 18)	15	20	0,25
4	[18; 24)	21	12	0,15
5	[24; 30]	27	8	0,10
	Сума		80	1

4. Построяваме хистограмите и полигоните на абсолютните и на относителните честоти.

• Хистограма и полигон на абсолютните честоти



• Хистограма и полигон на относителните честоти



ЗАДАЧИ

1. В състезание по издръжливост участвали 250 мъже и жени. Получените от тях времена са отразени в таблиците.

Време в минути	15	25	35	45	55
Брой мъже	10	20	30	25	15

Време в минути	15	25	35	45	55
Брой жени	25	35	40	30	20

За всеки от половете намерете абсолютните и относителните честоти и ги представете в честотни таблици. На една диаграма постройте полигоните за двете групи от данни. Анализирайте получените резултати.

2. Резултатите, получени при измерване ръста на учениците от 12. клас в едно училище, са дадени в таблицата.

Ръст (в см)	[140; 150)	[150; 160)	[160; 170)	[170; 180)	[180; 190)	[190; 200]
Брой ученици	10	15	45	60	50	20

Намерете абсолютните и относителните честоти и ги представете в честотна таблица. Постройте хистограма и полигон на абсолютните и на относителните честоти.

ЗАДАЧА 1 Решете логаритмичните уравнения:

а) $\log_3(x^3 - 5x + 3) = 1$;

б) $\log_2(x^3 - 7x^2 - 8x + 8) = 3$.

Решение:

Уравненията са от вида $\log_a f(x) = b$.

Прилагаме *Правило 1*: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

а) $\log_3(x^3 - 5x + 3) = 1$

$$x^3 - 5x + 3 = 3^1$$

$$x^3 - 5x + 3 = 3$$

$$x^3 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 5) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{5}; x_3 = \sqrt{5}$$

Отг. $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{5}$, и $x_3 = \sqrt{5}$

б) $\log_2(x^3 - 7x^2 - 8x + 8) = 3$

$$x^3 - 7x^2 - 8x + 8 = 2^3$$

$$x^3 - 7x^2 - 8x + 8 = 8$$

$$x^3 - 7x^2 - 8x = 0$$

$$x(x^2 - 7x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 8$$

Отг. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 8$

ЗАДАЧА 2 Решете уравненията:

а) $\log_{\sqrt{7}}(2^{x+5} - 1) = 2$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(3^{x^2+1} - 5) = -2$.

Решение:

а) $\log_{\sqrt{7}}(2^{x+5} - 1) = 2$

$$2^{x+5} - 1 = (\sqrt{7})^2$$

$$2^{x+5} - 1 = 7$$

$$2^{x+5} = 8$$

$$2^{x+5} = 2^3$$

$$x + 5 = 3$$

$$x = -2$$

Отг. $x = -2$

б) $\log_{\frac{1}{2}}(3^{x^2+1} - 5) = -2$

$$3^{x^2+1} - 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$3^{x^2+1} - 5 = 4$$

$$3^{x^2+1} = 9$$

$$3^{x^2+1} = 3^2$$

$$x^2 + 1 = 2$$

$$x^2 = 1, x_{1,2} = \pm 1$$

Отг. $x = \pm 1$

ЗАДАЧА 3 Решете логаритмичните уравнения:

а) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$;

б) $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$.

Решение:

а) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$

Прилагаме *Правило 1* и получаваме

$$x^2 - 2x = 2^3$$

$$x^2 - 2x = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = 4; x_2 = -2.$$

б) $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$

Тъй като

$$\log_2(x - 2) + \log_2 x = \log_2(x^2 - 2x),$$

получаваме уравнението

$$\log_2(x^2 - 2x) = 3,$$

което решихме в а).

Отг. Уравнението има два корена:
 $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

С проверка установяваме, че $x = 4$ е корен на уравнението
 $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3$.
 $\log_2(4-2) + \log_2 4 = 3$
 $1 + 2 = 3$
 При $x = -2$ $\log_2(x-2)$ и $\log_2 x$ нямат смисъл.

Отг. Уравнението има само един корен:
 $x = 4$.



Причината двете уравнения да имат различни корени е, че те имат различни дефиниционни области (допустими стойности).

Уравнението $\log_2(x^2 - 2x) = 3$ има ДС: $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Уравнението $\log_2(x-2) + \log_2 x = 0$ има ДС: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; +\infty)$.

Тези бележки показват, че при извършване на преобразувания в логаритмични уравнения дефиниционните области (допустимите стойности) могат да се „стеснят“ или „разширят“ и да се „изгубят“ или „придобият“ корени, т.е. ако извършваме преобразувания в логаритмично уравнение, е много важно да се намира дефиниционната област (допустимите стойности) на уравненията.

Уравнения, които се свеждат до уравнения от вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Някои логаритмични уравнения могат да се преобразуват така, че да се получи уравнение от вида $\log_a f(x) = b$ или $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

ЗАДАЧА 4 Решете логаритмичните уравнения:

а) $\log_4(x-3) + \log_4 x = 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$.

Решение:

а) $\log_4(x-3) + \log_4 x = 1$

$$\text{ДС: } \begin{cases} x-3 > 0 \\ x > 0 \\ x > 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (3; +\infty)$$



$$\log_4(x(x-3)) = 1$$

$$x^2 - 3x = 4^1$$

$$x^2 - 3x = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

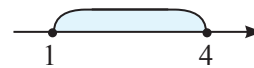
$$x_1 = -1 \notin \text{ДС}$$

$$x_2 = 4 \in \text{ДС}$$

б) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$

$$\text{ДС: } \begin{cases} 4-x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (1; 4)$$



$$\log_{\frac{1}{2}}((4-x)(x-1)) = -1$$

$$(4-x)(x-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$4x - 4 - x^2 + x = 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2 \in \text{ДС}$$

$$x_2 = 3 \in \text{ДС}$$

Отг: Уравнението има един корен:
 $x = 4$

Отг: Уравнението има два корена:
 $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$

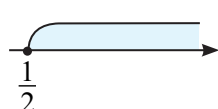
ЗАДАЧА 5

Решете логаритмичните уравнения:

а) $\log_2(2x-1) + \log_2(x+1) = 2 + \log_2(x+2)$; б) $2\log_7(x+1) = \log_7(x+9) + \log_7(3x-17)$.

Решение:

а) $\log_2(2x-1) + \log_2(x+1) = 2 + \log_2(x+2)$ б) $2\log_7(x+1) = \log_7(x+9) + \log_7(3x-17)$

$$\text{ДС: } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$


$$\log_2((2x-1)(x+1)) = \log_2 2^2 + \log_2(x+2)$$

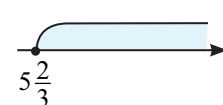
$$\log_2(2x^2 + x - 1) = \log_2(4(x+2))$$

$$2x^2 + x - 1 = 4x + 8$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{cases} x_1 = 3 \in \text{ДС} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \notin \text{ДС} \end{cases}$$

Отг. Уравнението има един корен:
 $x = 3$.

$$\text{ДС: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+9 > 0 \\ 3x-17 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(5\frac{2}{3}; +\infty\right)$$


$$\log_7(x+1)^2 = \log_7((x+9)(3x-17))$$

$$(x+1)^2 = (x+9)(3x-17)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 17x + 27x - 153$$

$$2x^2 + 8x - 154 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 + 4x - 77 = 0$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 9 = \begin{cases} x_1 = 7 \in \text{ДС} \\ x_2 = -11 \notin \text{ДС} \end{cases}$$

Отг. Уравнението има един корен:
 $x = 7$.**ЗАДАЧА 6**

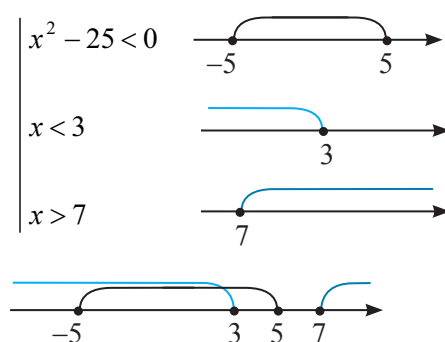
Решете логаритмичните уравнения:

а) $\lg(25 - x^2) = \lg(3 - x) + \lg(x - 7)$;

б) $\lg(x^4 + 3x^2 + 2) = \lg(x^2 + 1) + \lg(x^2 + 2)$.

Решение:

а) $\lg(25 - x^2) = \lg(3 - x) + \lg(x - 7)$

$$\text{ДС: } \begin{cases} 25 - x^2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$


$$\text{ДС: } x \in \emptyset$$

Отг. Уравнението няма корени.

$$\text{ДС: } \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 2 > 0, \text{ всяко } x \\ x^2 + 1 > 0, \text{ всяко } x \\ x^2 + 2 > 0, \text{ всяко } x \end{cases}$$

$$\text{ДС: } x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\lg(x^4 + 3x^2 + 2) = \lg((x^2 + 1)(x^2 + 2))$$

$$\lg(x^4 + 3x^2 + 2) = \lg(x^4 + 2x^2 + x^2 + 2)$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$\text{всяко } x$$

Отг. Всяко число е корен на уравнението.

ЗАДАЧА 7

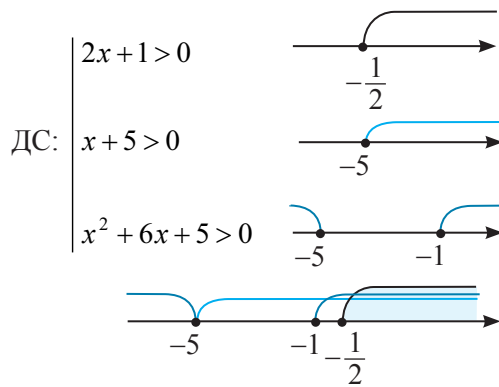
Решете логаритмичните уравнения:

а) $\lg(2x+1) + \lg(x+5) = \lg(x^2 + 6x + 5)$;

б) $\lg(2x^2 + 5x + 6) = \lg(x+1) + \lg(x+6)$.

Решение:

а) $\lg(2x+1) + \lg(x+5) = \lg(x^2 + 6x + 5)$



$\Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$\lg((2x+1)(x+5)) = \lg(x^2 + 6x + 5)$

$2x^2 + 10x + x + 5 = x^2 + 6x + 5$

$x^2 + 5x = 0$

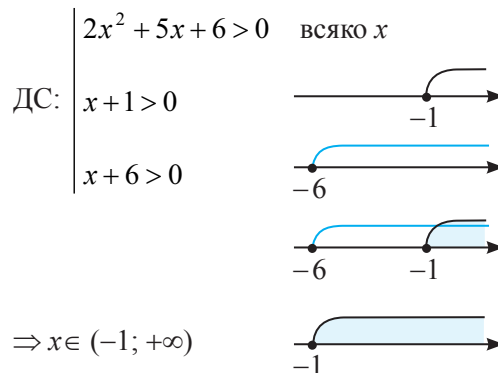
$x(x+5) = 0$

$x_1 = 0 \in \text{ДС}$

$x_2 = -5 \notin \text{ДС}$

Отг. Уравнението има един корен:
 $x = 0$.

б) $\lg(2x^2 + 5x + 6) = \lg(x+1) + \lg(x+6)$



$\lg(2x^2 + 5x + 6) = \lg((x+1)(x+6))$

$2x^2 + 5x + 6 = x^2 + 6x + x + 6$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x_1 = 0 \in \text{ДС}$

$x_2 = 2 \in \text{ДС}$

Отг. Уравнението има два корена:
 $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

ЗАДАЧИ

Решете логаритмичните уравнения.

1. $\log_3(x^3 - 5x^2 + 4x + 9) = 2$

2. $\lg(x^3 - 7x + 10) = 1$

3. $\log_2(3^{4x-3} + 1) = 2$

4. $\log_3(3^{x-1} + 6) = x$

5. $\log_6(6^{x+1} - 30) = x$

6. $\log_2(2^x + 7) = 3 - x$

7. $\log_6(6^{-x} + 5) = x + 1$

8. $\log_5(6 - 5^x) = 1 - x$

9. $\log_4(x-3) + \log_4 x = 1$

10. $\log_3(2x-1) + \log_3(x-4) = 2$

11. $\log_7(x+6) + \log_7 x = 1$

12. $\log_3(5-x) + \log_3(3-x) = 1$

13. $\log_5(x+2) + \log_5(6-x) = \log_5(x+8)$

14. $\log_2(2x-1) + \log_2(x+1) = 2 + \log_2(x+2)$

15. $2\lg(x+1) = \lg(4x-5) + \lg(x-5)$

16. $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(1,5x-3)$

17. $\log_2(5-x) + \log_2(x+2) = 1 + \log_2(x-1)$

18. $2\lg(x+1) = \lg(x+9) + \lg(3x-17)$

19. $\log_2(2^x + 3) + \log_2(5 - 2^x) = 4$

20. $\log_{\sqrt{3}}(2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2$