СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА 4. ВЕРОЯТНОСТИ

ИЗХОДНО НИВО

11. СТЕПЕН С РАЦИОНАЛЕН СТЕПЕНЕН ПОКАЗАТЕЛ. СВОЙСТВА

Досега разгледахме само степени с цял показател. В този урок ще дефинираме степен с рационален показател. Дефинирането на степента a^r (където $a > 0$, а r е рационално число) трябва да стане по такъв начин, че да бъде спазен принципът за перманентност, т.е. и за разширеното понятие **степен с рационален показател** да останат в сила всички правила (свойства) на степените с цял показател.

Ще припомним, че едно число r е рационално, когато може да се представи като частно на две цели числа. От това определение следва, че всяко рационално число r можем да представим и във вида $r = \frac{m}{n}$, където числителят m е цяло число, а знаменателят n е естествено число, т.е. $r = \frac{m}{n}$, $r \in Q$, $m \in Z$, $n \in N$.

Степен с положителен дробен показател

Според правилото за степенуване на степен, ако m и n са цели числа, то

$(a^m)^n = a^{m.n}$.

Искаме това правило да бъде в сила и при дробни показатели m и n.

Например при $m = \frac{3}{2}$, $n = 2$ трябва да е изпълнено равенството

(1) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{\frac{3}{2}\cdot 2} = a^3$.

Знаем, че неотрицателният корен на уравнението $x^2 = A$ $(A \geq 0)$ е $x = \sqrt{A}$.

В равенството **(1)** нека $x = a^{\frac{3}{2}}$, $A = a^3$. Тогава от **(1)**, при условие че $a^3 \geq 0$, получаваме

(2) $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$.

Така стигаме до извода, че е целесъобразно да се даде следното определение:

О

Ако $a \geq 0$ и m и $n \geq 2$ са естествени числа, то $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$.

ПРИМЕРИ

$5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3} = \sqrt[7]{125}$

$2^{\frac{5}{9}} = \sqrt[9]{2^5} = \sqrt[9]{32}$

$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

$a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5} = a^2\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$

$b^{\frac{9}{5}} = \sqrt[5]{b^9} = b\sqrt[5]{b^4}$

Степента $a^{\frac{m}{n}}$ дефинирахме само при $a \geq 0$, тъй като при $a < 0$ изразът $\sqrt[n]{a^m}$ невинаги има смисъл. Например $\sqrt[4]{(-2)^3}$ няма смисъл.

Степента $a^{\frac{m}{n}}$ може да се дефинира като $\sqrt[n]{a^m}$ и когато $a < 0$ само ако n е нечетно число.

Степен с отрицателен дробен показател

Като имаме предвид, че при $a > 0$, $n \in N$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, понятието **степен с отрицателен дробен показател** дефинираме така:

О

Ако $a > 0$ и m и $n \geq 2$ са естествени числа, то $\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$.

Тъй като $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при $a > 0$ и $m, n \in N$, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Като вземем предвид, че $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$, то повдигането на числото $a > 0$ на степен отрицателно рационално число $-\dfrac{m}{n}$ се свежда до повдигане на реципрочното му число $\dfrac{1}{a}$ на степен положителното рационално число $\dfrac{m}{n}$.

ПРИМЕРИ

$$8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Като се използва свойството на коренуването и степенуването с цял показател, може да се докаже, че и за степен с рационален показател при $a > 0$, $b > 0$, $x \in Q$, $y \in Q$ са в сила следните свойства:

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$	**6.** $a^0 = 1$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	**7.** $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$	**8.** $a^x > 0$
4. $(ab)^x = a^x.b^x$	**9.** Ако $a > 1$ и $x < y$, то $a^x < a^y$. Ако $0 < a < 1$ и $x < y$, то $a^x > a^y$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	

Ще докажем част от тези свойства.

!

За всяко $a > 0$ и всеки две рационални числа x и y е в сила равенството $\boldsymbol{a^x.a^y = a^{x+y}}$.

Доказателство:

Нека $x = \dfrac{p}{q}$ и $y = \dfrac{m}{n}$ (p, m, q, n – цели числа, $q \geq 2$, $n \geq 2$).

Като използваме определението за степен с рационален показател, свойствата на степените с цял показател и свойствата на корените, получаваме

$$a^{x+y} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{qn}} = \sqrt[qn]{a^{pn+qm}} = \sqrt[qn]{a^{pn}.a^{qm}} =$$

$$= \sqrt[qn]{a^{pn}}.\sqrt[qn]{a^{qm}} = \sqrt[q]{a^p}\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{m}{n}} = a^x.a^y.$$

! Ако x е рационално число и $a > 0$, то $\boldsymbol{a^x > 0}$.

Доказателство:

- Ако x е естествено число, то $a^x = \underbrace{a.a.\ldots a}_{x \text{ пъти}} > 0$.
- Ако $x = 0$, то $a^x = a^0 = 1 > 0$.
- Ако $x = \dfrac{p}{q}$, където p и $q \geq 2$ са естествени числа, то $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$.
- Ако $x = -y$, където y е положително рационално число, то $a^x = a^{-y} = \dfrac{1}{a^y} > 0$.

Ще покажем верността на свойство (**9**) със следните примери:

ПРИМЕРИ

$a = \dfrac{1}{3} < 1$

От $2 < 3 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 > \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$,

защото $\dfrac{1}{9} > \dfrac{1}{27}$.

$a = 5 > 1$

От $2 < 3 \Rightarrow 5^2 < 5^3$,

защото $25 < 125$.

$a = 3 > 1$

От $-3 < -2 \Rightarrow 3^{-3} < 3^{-2}$,

защото $\dfrac{1}{27} < \dfrac{1}{9}$.

ЗАДАЧА 1 Пресметнете:

а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Решение:

а) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} =$
$= \sqrt[4]{3^4} =$
$= 3$

б) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} =$
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3} =$
$= \dfrac{2}{3}$

в) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} =$
$= \sqrt[3]{8^2} =$
$= \sqrt[3]{64} =$
$= \sqrt[3]{4^3} =$
$= 4$

ЗАДАЧА 2 Извършете означените действия:

а) $16^{\frac{3}{4}}.25^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$; в) $243^{-\frac{1}{5}} : 2^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

а) $16^{\frac{3}{4}}.25^{\frac{1}{2}} =$
$= (2^4)^{\frac{3}{4}}.(5^2)^{\frac{1}{2}} =$
$= 2^{4\cdot\frac{3}{4}}.5^{2\cdot\frac{1}{2}} =$
$= 2^3.5^1 =$
$= 8.5 =$
$= 40$

б) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$
$= \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} =$
$= \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} =$
$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} = 1$

в) $243^{-\frac{1}{5}} : 2^{-\frac{1}{2}} =$
$= (3^5)^{-\frac{1}{5}} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= 3^{-1}.2^{\frac{1}{2}} =$
$= \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{2} =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ЗАДАЧА 3 Определете кое от числата е по-голямо:

а) $1{,}7^2$ и $1{,}7^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$.

Решение:

Прилагаме свойство (**9**) и получаваме:

а) $a = 1{,}7 > 1$

От $2 > -3 \Rightarrow 1{,}7^2 > 1{,}7^{-3}$.

б) $a = \frac{1}{2} < 1$.

От $-4 > -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$.

ЗАДАЧА 4 Запишете изразите:

а) $\frac{1}{a} \cdot a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}}$ $(a > 0)$ с корен;

б) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ със степен.

Решение:

а) $\frac{1}{a} \cdot a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} = a^{-1} . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} =$

$= a^{-1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

б) $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2.2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{1+\frac{1}{2}}} =$

$= \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$

ЗАДАЧА 5 Опростете израза $A = \dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6} . \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-12}}{a^{-4}}$ при $a > 0$ и пресметнете стойността му, ако:

а) $a = \frac{1}{2}$;

б) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

$$A = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-6} . \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-12}}{a^{-4}} = \frac{a^{\frac{2}{3}\cdot(-6)} . a^{\frac{1}{3}\cdot(-12)}}{a^{-4}} = \frac{a^{-4} . a^{-4}}{a^{-4}} = a^{-4}$$

а) При $a = \frac{1}{2}$

$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$.

б) При $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{4} = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9$.

ЗАДАЧИ

Пресметнете:

1. $16^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

2. $\left(\sqrt[4]{0{,}001}\right)^{-4} - \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Представете със степен:

3. $7^{\frac{1}{3}} . 7^{-\frac{5}{6}} . 7^{\frac{5}{2}}$;

4. $\dfrac{5^{\frac{2}{3}} . 5^{-1}}{5^{-\frac{2}{3}}}$.

Опростете изразите и запишете резултатите с корени:

5. $A = \frac{2}{a} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} . a^{\frac{3}{4}}$, $a > 0$;

6. $B = \dfrac{\left(x^{-\frac{1}{3}} . y^{-\frac{1}{2}}\right)^3}{x^{-\frac{3}{2}} . y^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

Запишете със степени изразите:

7. $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$;

8. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

Сравнете числата:

9. $4^{1{,}2}$ и 4^3;

10. $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$;

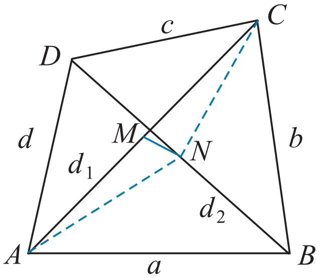
11. $0{,}5^{0{,}3}$ и $0{,}5^3$;

12. $3^{-\frac{1}{2}}$ и $3^{-\frac{1}{3}}$.

29. РЕШАВАНЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК. УПРАЖНЕНИЕ

ЗАДАЧА 1 Докажете, че за всеки изпъкнал четириъгълник е изпълнено тъждеството $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2}$, където a, b, c и d са страните, d_1 и d_2 – диагоналите, а M и N – средите на диагоналите на четириъгълника.

Доказателство:



1. От формулите за медианите в триъгълника получихме:

за $\triangle ANC$ $4MN^2 = 2\,(AN^2 + CN^2) - d_1^2$,

за $\triangle ABD$ $4AN^2 = 2\,(a^2 + d^2) - d_2^2$,

за $\triangle BDC$ $4CN^2 = 2\,(b^2 + c^2) - d_2^2$.

2. Събираме почленно второто и третото равенство и получаваме

$4(AN^2 + CN^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2\,d_2^2$

$2(AN^2 + CN^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - d_2^2$.

3. Заместваме в първото равенство и получаваме

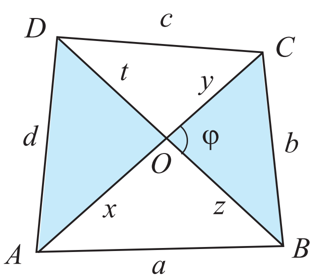
$4MN^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - d_2^2 - d_1^2$, т.е.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4MN^2$.

Ако четириъгълникът е успоредник, $c = a$, $d = b$, $MN = 0$ и от *Задача 1* получаваме $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_1^2$.

ЗАДАЧА 2 За произволен четириъгълник $ABCD$ са въведени следните означения: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ и $\sphericalangle BOC = \varphi$, където O е пресечна точка на диагоналите. Докажете, че $\boldsymbol{(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 2d_1d_2\cos\varphi}$.

Доказателство:



1. Означаваме $OA = x$, $OC = y$, $OB = z$, $OD = t$.

2. За $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ и $\triangle ODA$ прилагаме косинусовата теорема и получаваме

$$a^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(180° - \varphi) = x^2 + z^2 + 2xz\cos\varphi$$
$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi$$
$$c^2 = y^2 + t^2 - 2yt\cos(180° - \varphi) = y^2 + t^2 + 2yt\cos\varphi$$
$$d^2 = t^2 + x^2 - 2tx\cos\varphi.$$

3. От сбора на първото и третото равенство изваждаме сбора на второто и четвъртото равенство и получаваме

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) =$$
$$= 2xz\cos\varphi + 2yt\cos\varphi + 2yz\cos\varphi + 2tx\cos\varphi =$$
$$= 2(\underline{xz} + yt + \underline{yz} + tx)\cos\varphi =$$
$$= 2\big((x + y)z + (x + y)t\big)\cos\varphi =$$
$$= 2(x + y)(z + t)\cos\varphi = 2d_1d_2\cos\varphi$$
$$\Rightarrow (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 2d_1d_2\cos\varphi.$$

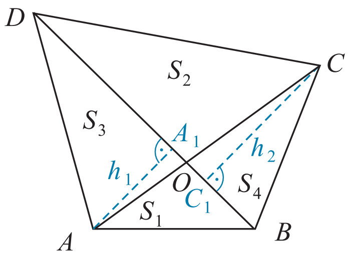
!

Следствие от Задача 2

Диагоналите на един четириъгълник са взаимноперпендикулярни тогава и само тогава, когато сборът от квадратите на две негови срещуположни страни е равен на сбора от квадратите на другите две срещуположни страни.

ЗАДАЧА 3 Диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O и разделят четириъгълника $ABCD$ на четири триъгълника – $\triangle OAB$, $\triangle OCD$, $\triangle OAD$ и $\triangle OBC$, с лица съответно S_1, S_2, S_3, S_4. Докажете, че $\boldsymbol{S_1 . S_2 = S_3 . S_4}$.

Доказателство:



1. $\triangle OAB$ и $\triangle OAD$ имат общ връх A и основите им OB и OD лежат на една права ($AA_1 \perp BD$, $AA_1 = h_1$)

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \frac{OB.\frac{h_1}{2}}{OD.\frac{h_1}{2}} = \frac{OB}{OD}.$$

2. $\triangle OBC$ и $\triangle ODC$ имат общ връх C и основите им OB и OD лежат на една права ($CC_1 \perp BD$, $CC_1 = h_2$)

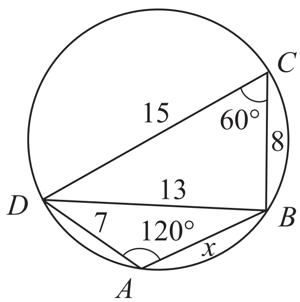
$$\Rightarrow \frac{S_4}{S_2} = \frac{OB.\frac{h_2}{2}}{OD.\frac{h_2}{2}} = \frac{OB}{OD}.$$

От (**1**) и (**2**) $\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{S_4}{S_2} \Rightarrow S_1 . S_2 = S_3 . S_4$.

ЗАДАЧА 4 Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Ако $AD = 7$, $DC = 15$, $BC = 8$ и $\measuredangle BCD = 60^\circ$, намерете:

а) BD; б) P; в) S; г) R.

Решение:



а) За $\triangle BCD$ прилагаме косинусовата теорема.

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD\cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 64 + 225 - 2.8.15.\frac{1}{2} = 289 - 120 = 169$$

$$BD = 13$$

б) За $\triangle ABD$ прилагаме косинусовата теорема.

$$\measuredangle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,\ AB = x$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos 120^\circ$$

$$169 = x^2 + 49 + 2x.7\cdot\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_1 = -15,\ x_2 = 8,\ x > 0 \Rightarrow AB = 8$$

$$P = AB + BC + CD + DA = 8 + 8 + 15 + 7 = 38$$

в) Лицето S на четириъгълника ще намерим по два начина.

I начин: $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}AB.AD\sin 120^\circ + \frac{1}{2}BC.CD\sin 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\cdot 8.7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 8.15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 44\sqrt{3}$$

II начин: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} =$

$$= \sqrt{(19-8).(19-8).(19-15).(19-7)} = \sqrt{11.11.4.12} = 44\sqrt{3}$$

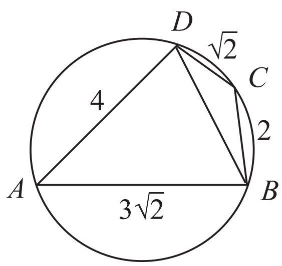
г) Окръжността, описана около четириъгълника $ABCD$, съвпада с окръжността, описана около $\triangle BCD$. За $\triangle BCD$ прилагаме синусовата теорема.

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{BD}{2\sin 60^\circ} = \frac{13}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

ЗАДАЧА 5 Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Ако $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 4$, $CD = \sqrt{2}$ и $BC = 2$, намерете:

а) S; б) $\sphericalangle BAD$; в) BD; г) R.

Решение:



а) За вписания четириъгълник $ABCD$ прилагаме формулата

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

$$p = \frac{3\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+4}{2} = 3+2\sqrt{2}$$

$$S = \sqrt{(3+2\sqrt{2}-3\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-2)(3+2\sqrt{2}-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-4)}$$

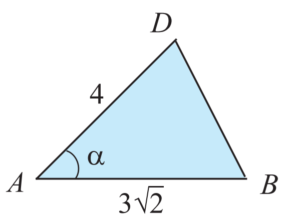
$$S = \sqrt{(3-\sqrt{2}).(2\sqrt{2}+1).(3+\sqrt{2}).(2\sqrt{2}-1)} =$$

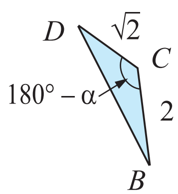
$$= \sqrt{(3+\sqrt{2}).(3-\sqrt{2}).(2\sqrt{2}+1).(2\sqrt{2}-1)} =$$

$$= \sqrt{\left(3^2-(\sqrt{2})^2\right).\left((2\sqrt{2})^2-1^2\right)} =$$

$$= \sqrt{(9-2).(8-1)} = \sqrt{7.7}$$

$$S = 7$$





б) Означаваме $\sphericalangle BAD = \alpha \Rightarrow \sphericalangle BCD = 180° - \alpha$.

$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} =$$

$$= \frac{1}{2}AB.AD\sin\alpha + \frac{1}{2}BC.CD\sin(180° - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}.4\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 2.\sqrt{2}\sin\alpha = 6\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha$$

$$S = 7\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$7 = 7\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

в) За $\triangle ABD$ прилагаме косинусовата теорема.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos 45° =$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2.3\sqrt{2}.4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 18+16-24$$

$$BD^2 = 10$$

$$BD = \sqrt{10}$$

г) Окръжността, описана около четириъгълника $ABCD$, съвпада с окръжността, описана около $\triangle ABD$.

За $\triangle ABD$ прилагаме синусовата теорема.

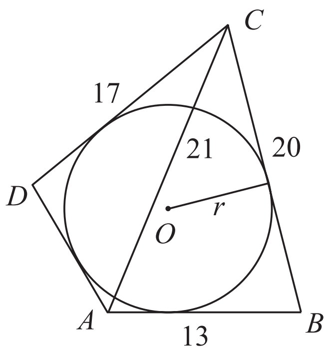
$$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{BD}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{2.\sin 45°} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{5}$$

ЗАДАЧА 6 Около окръжност е описан четириъгълник $ABCD$. Ако $AB = 13$, $BC = 20$, $CD = 17$ и $AC = 21$, намерете:

а) AD; б) P; в) S; г) r.

Решение:



а) $ABCD$ – описан четириъгълник

$$\Rightarrow AB + CD = BC + AD$$
$$13 + 17 = 20 + AD$$
$$AD = 10$$

б) $P = AB + BC + CD + DA = 13 + 20 + 17 + 10 = 60$

в) Лицето на $ABCD$ е сбор от лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, които намираме по Хероновата формула.

$$p_{\triangle ABC} = \frac{13+20+21}{2} = 27$$

$$S_1 = S_{\triangle ABC} = \sqrt{27.(27-13).(27-20).(27-21)} =$$
$$= \sqrt{27.14.7.6} = \sqrt{3^3.2.7.7.2.3} = 9.2.7 = 126$$

$$p_{\triangle ACD} = \frac{21+17+10}{2} = 24$$

$$S_2 = S_{\triangle ACD} = \sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)} =$$
$$= \sqrt{24.3.7.14} = \sqrt{4.2.3.3.7.7.2} = 4.3.7 = 84$$

$$S = S_1 + S_2 = 126 + 84 = 210$$

г) $ABCD$ – описан четириъгълник

$\Rightarrow S = p.r$, $210 = 30.r \Rightarrow r = 7$

ЗАДАЧИ

1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Намерете радиуса R на окръжността, ако $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 2$ и $\sphericalangle ADC = 135°$.

2. За четириъгълника $ABCD$ е дадено, че $AC.BD = 24$. Ако $\sphericalangle CAB = 55°$ и $\sphericalangle ABD = 65°$, намерете лицето S на четириъгълника.

3. Точките M, N, P и Q са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$. Ако $MNPQ$ е правоъгълник с лице 36 cm^2, намерете лицето S на $ABCD$.

4. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AD = 5$ и $BC = 7$ е описан около окръжност с радиус $r = 3$. Намерете лицето S на четириъгълник.

5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан във окръжност. Ако $AB = BC = 5$, $CD = 8$ и $\sphericalangle BAD = 120°$, намерете:

а) BD; б) P; в) R; г) S.

6. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност. Пресечната точка на диагоналите му е O. Докажете, че $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, където R_1, R_2, R_3, R_4 са радиусите на окръжностите, описани съответно около триъгълниците OAB, OBC, OCD, ODA.

7. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 19$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 15$ cm и $AD = 21$ cm е вписан в окръжност. Правите AB и CD се пресичат в точка M. Намерете отношението на лицата на $\triangle AMD$ и четириъгълника $ABCD$.

8. Върху страните AB, BC, CD и DA на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са взети съответно точки M, N, P и Q така, че $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = \frac{1}{2}$. Намерете отношението на лицата на четириъгълниците $MNPQ$ и $ABCD$.