

Мая Алашка, Райна Алашка, Пламен Паскалев

МАТЕМАТИКА

10.

КЛАС

АрхИ(Μ)ΕΔ

ИЗДАТЕЛСТВО

Внимание! В учебника не се пише, чертае или огражда!

Означения, използвани в учебника:

A	Аксиома
O	Определение
П	Правило
T	Теорема
!	Знания, които трябва да се запомнят
👁	Обърнете внимание! – пояснения към решението на задачите

ЗАДАЧА Решена задача с повишена трудност

1., 2., ... Задачи с повишена трудност

Рецензенти: проф. д.п.н. Сава Гроздев
доц. д-р Драго Михалев

Консултант по графичния дизайн: проф. Илия Иванов Илиев

- © Мая Събчева Алашка, д-р Райна Милкова Алашка, Пламен Георгиев Паскалев – автори, 2024 г.
- © Ангелина Владиславова Аврамова – графичен дизайн, 2024 г.
- © Ангелина Владиславова Аврамова – илюстрации, 2024 г.
- © Емил Генков Христов – художник на корицата, 2024 г.
- © Издателство „Архимед 2“ ЕООД, 2024 г.

ISBN: 978-954-779-340-8

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

1. Тест с решения.....6
2. Входно ниво. Тест № 1 и Тест № 2.....10

ТЕМА 1. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

3. Действия с квадратни корени (преговор).....14
4. Иррационални изрази18
5. Преобразуване на иррационални изрази.....20
6. Иррационални уравнения с един квадратен радикал24
7. Иррационални уравнения с два квадратни радикала.....26
8. Иррационални уравнения. Упражнение.....28
9. Иррационални уравнения. Упражнение.....30
10. Иррационални уравнения, които се решават чрез полагане32
11. Решаване на иррационални уравнения с теорема за еквивалентност36
12. Обобщение на темата „Иррационални изрази. Иррационални уравнения“38
13. Тестове върху темата „Иррационални изрази. Иррационални уравнения“43

ТЕМА 2. ПРОГРЕСИИ

14. Числови редици. Начин за задаване на числови редици.....46
15. Аритметична прогресия. Формула за общия член на аритметична прогресия50
16. Свойства на аритметичната прогресия52
17. Формула за сбора от първите n члена на аритметична прогресия.....54

18. Геометрична прогресия. Формула за общия член на геометрична прогресия56
19. Свойства на геометричната прогресия58
20. Формула за сбора от първите n члена на геометрична прогресия60
21. Комбинирани задачи от аритметична и геометрична прогресия.....62
22. Проста лихва. Сложна лихва.....66
23. Практически задачи, свързани със сложна лихва70
24. Обобщение на темата „Прогресии“.....74
25. Тестове върху темата „Прогресии“.....79

ТЕМА 3. СТАТИСТИКА И ОБРАБОТКА НА ДАННИ

26. Описателна статистика82
27. Централни тенденции – мода, медиана и средноаритметично86
28. Централни тенденции – мода, медиана и средноаритметично. Упражнение.....88
29. Практически задачи. Упражнение90

ТЕМА 4. РЕШАВАНЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

30. Тригонометричните функции синус, косинус, тангенс и котангенс в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$94
31. Основни тригонометрични тъждества в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$96
32. Таблица за стойностите на тригонометричните функции от някои специални ъгли в интервала $[0^\circ; 180^\circ]$98
33. Пресмятане на тригонометрични изрази. Упражнение100
34. Синусова теорема.....102

35. Решаване на произволен триъгълник с помощта на синусова теорема – основни задачи. Упражнение	106
36. Косинусова теорема	110
37. Решаване на произволен триъгълник с помощта на косинусова теорема – основни задачи. Упражнение	114
38. Формули за медиани на триъгълник ..	118
39. Формули за ъглополовящи на триъгълник	122
40. Формули за лице на триъгълник	126
41. Решаване на триъгълник. Упражнение.....	130
42. Обобщение на темата „Решаване на триъгълник“	134
43. Тестове върху темата „Решаване на триъгълник“	139

ТЕМА 5. ЕЛЕМЕНТИ ОТ СТЕРЕОМЕТРИЯТА

44. Прави и равнини в пространството. Взаимно положение на две прави и ъгъл между тях	142
45. Взаимно положение на права и равнина. Перпендикулярност на права и равнина	148
46. Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина.....	152
47. Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини	156

48. Права призма	160
49. Пирамида	164
50. Пирамида. Упражнение	168
51. Прав кръгов цилиндър	174
52. Прав кръгов конус	178
53. Сфера и кълбо	182
54. Обобщение на темата „Елементи от стереометрията“	186
55. Тестове върху темата „Елементи от стереометрията“	191

ТЕМА 6. ПРЕГОВОР И ОБОБЩЕНИЕ ПО ВЪЗЛОВИ ТЕМИ

56. Рационални и ирационални уравнения	194
57. Системи уравнения	200
58. Неравенства. Системи неравенства	206
59. Функции	212
60. Прогресии	218
61. Подобни триъгълници. Метрични зависимости между отсечки.....	224
62. Тригонометрични функции	230
63. Решаване на триъгълник.....	236
64. Вероятности и статистика	242

ИЗХОДНО НИВО

65. Тест с решения.....	250
66. Изходно ниво. Тест № 1 и Тест № 2	255

ОТГОВОРИ	258
-----------------------	-----

Прав кръгов цилиндър

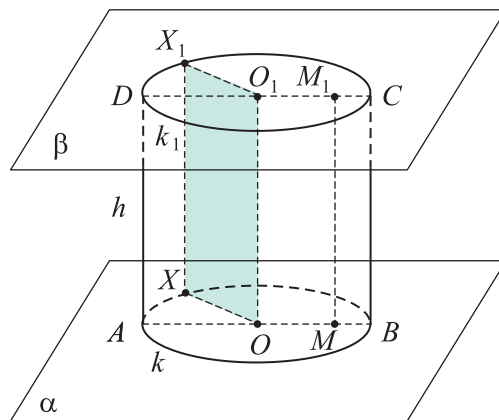
0

Нека α и β са успоредни равнини, а $k(O; r)$ и $k_1(O_1; r)$ са два еднакви кръга, лежащи съответно в α и β , и правата OO_1 е перпендикулярна на α и β . Ако M е точка от кръга k , а M_1 – точката от кръга k_1 , за която $MM_1 \parallel OO_1$, то множеството от всички точки върху всички отсечки MM_1 се нарича **прав кръгов цилиндър**.

Ще разглеждаме само прави кръгови цилиндри и за по-кратко вместо прав кръгов цилиндър ще казваме само цилиндър.

Елементи на цилиндър:

- **основи на цилиндъра**
се наричат кръговете k и k_1 ;
- **ос на цилиндъра**
се нарича отсечката (правата) OO_1 ;
- **радиус на цилиндъра**
се нарича радиусът r на основите;
- **височина на цилиндъра**
е разстоянието между α и β ($OO_1 = h$);
- **образователна (образуваща) на цилиндъра**
Ако c и c_1 са окръжностите съответно на кръговете k и k_1 и ако $X \in c$, $X_1 \in c_1$ и $XX_1 \parallel OO_1$, отсечката XX_1 се нарича образуваща на цилиндъра (отбелязва се с l);
- **осно сечение на цилиндъра**
се нарича сечение на цилиндъра с равнина, минаваща през оста му.



На чертежа $ABCD$ е осно сечение. Всяко осно сечение на цилиндъра е правоъгълник със страни, равни на диаметъра на основата и образуващата на цилиндъра.

Ако XX_1 е коя да е образуваща, цилиндърът може да се разглежда като тяло, получено от въртенето на правоъгълника OXX_1O_1 около оста OO_1 .

Казваме, че цилиндърът е **ротационно тяло** с ос на въртене OO_1 .

Повърхнина на прав кръгов цилиндър

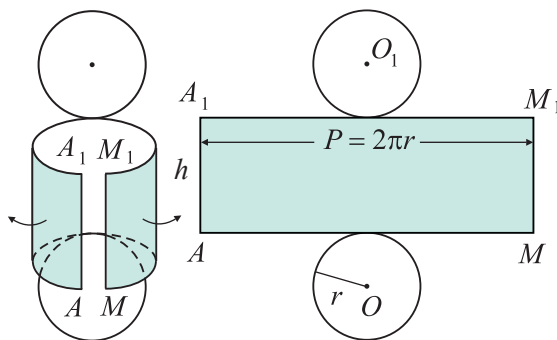
0

Множеството от точките на всички образуващи на прав кръгов цилиндър се нарича **околна повърхнина** (S) на цилиндъра.

Ако разрежем околната повърхнина на цилиндъра по коя да е от образуващите и я разгънем в равнина, ще получим правоъгълник AMM_1A_1 , чиито измерения са h и P .

Правоъгълникът AMM_1A_1 се нарича **развивка на околната повърхнина** на цилиндъра.

Лицето на околната повърхнина на цилиндъра съвпада с лицето на AMM_1A_1 и е $S = P \cdot h$.



О

Обединението на околната повърхнина на кръгов цилиндър и двете му основи се нарича **пълна повърхнина** (повърхнина) (S_1) на цилиндъра.

Ако към лицето на околната повърхнина S прибавим лицата на двата кръга (всеки с лице B), получаваме лицето S_1 на повърхнината на цилиндъра:

$$S_1 = S + 2B.$$

Формулите $S = Ph$ и $S_1 = S + 2B$ са едни и същи за права призма и прав кръгов цилиндър.

Ще припомним, че дължината P на окръжност с радиус r се намира по формулата $P = 2\pi r$, а лицето B на кръг с радиус r – по формулата $B = \pi r^2$.

За прав кръгов цилиндър с радиус на основата r и височината h :

- лицето на околната повърхнина е
 $S = Ph, \quad S = 2\pi rh;$
- лицето на пълната повърхнина е
 $S_1 = S + 2B, \quad S_1 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$

Обем на прав кръгов цилиндър

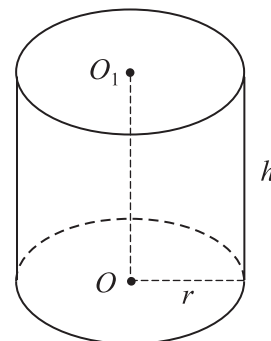
Обемът на прав кръгов цилиндър е $V = Bh$, където B е лицето на основата, а h – височината му. По същата формула намираме и обема на права призма.

Обемът на прав кръгов цилиндър с радиус на основата r и височина h е
 $V = Bh, \quad V = \pi r^2 \cdot h.$

ЗАДАЧА 1 Прав кръгов цилиндър има повърхнина $48\pi \text{ cm}^2$ и височина 5 cm. Намерете околната повърхнина и обема му.

Решение:

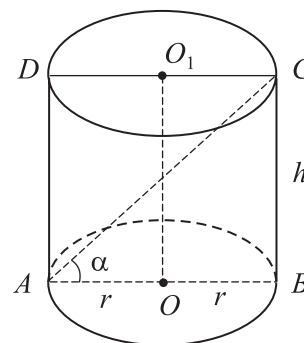
1. $S_1 = S + 2B$
 $48\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad | : 2\pi$
 $24 = rh + r^2$
 $r^2 + 5r - 24 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 - \text{да}, r_2 = -8 - \text{не}$
2. $S = 2\pi rh$
 $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 5$
 $S = 30\pi \text{ cm}^2$
3. $V = \pi r^2 h$
 $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$
 $V = 45\pi \text{ cm}^3$



ЗАДАЧА 2 Диагоналът на основото сечение на прав кръгов цилиндър е 6 cm и сключва с основата му ъгъл α . Намерете околната повърхнина и обема на цилиндъра.

Решение:

1. Проекцията на диагонала AC на сечението върху основата на цилиндъра е страната $AB = 2r$ на сечението
 $\Rightarrow \sphericalangle CAB = \alpha.$
2. $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$):
 $BC = AC \sin \alpha \Rightarrow h = 6 \sin \alpha$
 $AB = AC \cos \alpha \Rightarrow 2r = 6 \cos \alpha \Rightarrow r = 3 \cos \alpha$
3. $S = 2\pi rh$
 $S = 2\pi \cdot 3 \cdot \cos \alpha \cdot 6 \sin \alpha$
 $S = 36\pi \sin \alpha \cos \alpha \text{ cm}^2$
4. $V = \pi r^2 h$
 $V = \pi (3 \cos \alpha)^2 \cdot 6 \sin \alpha$
 $V = 54\pi \sin \alpha \cos^2 \alpha \text{ cm}^3$



ЗАДАЧА 3

Правоъгълникът $ABCD$ има диагонал $AC = d$ и $\sphericalangle CAB = \alpha$. Намерете S_1 и V на тялото, получено при пълното завъртане на правоъгълника около права, която минава през:

а) BC ; б) AB .

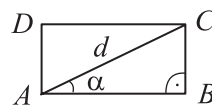
Решение:

$\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$):

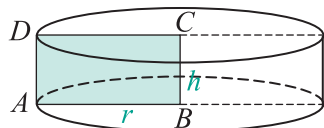
$$BC = AC \sin \alpha \qquad AB = AC \cos \alpha$$

$$BC = d \sin \alpha \qquad AB = d \cos \alpha$$

$$AD = d \sin \alpha$$



а)



1. Получава се цилиндър с

$$r = AB = d \cos \alpha \text{ и}$$

$$h = BC = d \sin \alpha.$$

2. $S = 2\pi rh$

$$S = 2\pi d \cos \alpha d \sin \alpha$$

$$S = 2\pi d^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

3. $S_1 = S + 2B$

$$S_1 = 2\pi d^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2\pi d^2 \cos^2 \alpha$$

$$S_1 = 2\pi d^2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

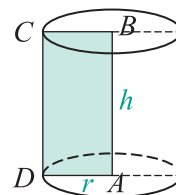
4. $V = B \cdot h$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi d^2 \cos^2 \alpha \cdot d \sin \alpha$$

$$V = \pi d^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

б)



1. Получава се цилиндър с

$$r = AD = d \sin \alpha \text{ и}$$

$$h = AB = d \cos \alpha.$$

2. $S = 2\pi rh$

$$S = 2\pi d \sin \alpha d \cos \alpha$$

$$S = 2\pi d^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

3. $S_1 = S + 2B$

$$S_1 = 2\pi d^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2\pi d^2 \sin^2 \alpha$$

$$S_1 = 2\pi d^2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

4. $V = B \cdot h$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi d^2 \sin^2 \alpha \cdot d \cos \alpha$$

$$V = \pi d^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

ЗАДАЧА 4

В цилиндър е вписан куб, като две негови срещуположни стени лежат в основите на цилиндъра. Намерете отношението на обемите на цилиндъра и куба.

Решение:

1. Основата на куба е квадрат, вписан в основата на цилиндъра. Страната a на квадрата е равна на височината h на цилиндъра, $h = a$.

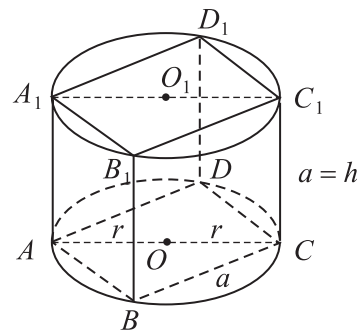
2. $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$): $AC = 2r$

$$a^2 + a^2 = (2r)^2 \Rightarrow a = r\sqrt{2}$$

3. $V_{\text{цилиндър}} = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot r\sqrt{2} = \pi r^3 \sqrt{2}$

4. $V_{\text{куб}} = a^3 = (r\sqrt{2})^3 = 2r^3 \sqrt{2}$

5. $\frac{V_{\text{цилиндър}}}{V_{\text{куб}}} = \frac{\pi r^3 \sqrt{2}}{2r^3 \sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$



ЗАДАЧА 5

В цилиндър е вписана правилна триъгълна призма. Намерете отношението на околните повърхнини на цилиндъра и призмата.

Решение:

1. Основата на призмата е равностранен триъгълник, вписан в основата на цилиндъра. Призмата и цилиндъра имат равни височини h .

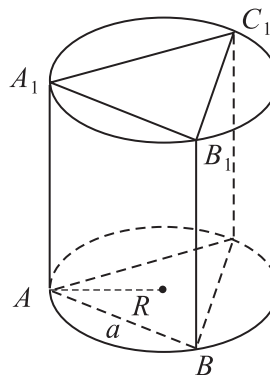
2. $\triangle ABC$ – равностранен със страна a
 R – радиус на цилиндъра

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

3. $S_{\text{цилиндър}} = 2\pi Rh$

4. $S_{\text{призма}} = P \cdot h = 3a \cdot h = 3R\sqrt{3}h$

$$5. \frac{S_{\text{цилиндър}}}{S_{\text{призма}}} = \frac{2\pi Rh}{3R\sqrt{3}h} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

**ЗАДАЧИ**

1. Радиусът на основата на цилиндър е 5 cm, а периметърът на основото му сечение е 36 cm. Намерете височината, повърхнината и обема на цилиндъра.
2. Околната повърхнина на цилиндър е $18,84 \text{ m}^2$, а пълната му повърхнина е $25,12 \text{ m}^2$. Намерете радиуса и височината на цилиндъра ($\pi \approx 3,14$).
3. Околната повърхнина (в cm^2) и обемът (в cm^3) на цилиндър се изразяват с едно и също число. Намерете диаметъра на цилиндъра.
4. Каква височина трябва да има цилиндър, така че околната му повърхнина да е 3 пъти по-голяма от лицето на основата?
5. Радиусът на основата на цилиндър е $r = 2 \text{ cm}$, а височината му е $h = 7 \text{ cm}$. Намерете радиуса на кръг, равнолицев с пълната повърхнина на цилиндъра.
6. Радиусът на цилиндър е 50 cm, а развивката на околната му повърхнина е квадрат. Намерете обема на цилиндъра.
7. Лицето на основата на цилиндър се отнася към лицето на основото му сечение както $\pi : 4$. Намерете ъгъла между диагоналите на основото сечение.
8. Височината на цилиндър е с 10 cm по-голяма от радиуса на основата му, а лицето на пълната повърхнина е $144\pi \text{ cm}^2$. Намерете радиуса на основата и височината на цилиндъра.
9. Околната повърхнина на цилиндър е S , а дължината на окръжността на основата е P . Намерете обема на цилиндъра.
10. В цилиндър е вписана правилна шестоъгълна призма. Намерете отношението на околните повърхнини на цилиндъра и призмата.
11. Лицето на основото сечение на прав кръгов цилиндър е равно на Q , а диагоналът на това сечение сключва с основата на цилиндъра ъгъл α . Намерете пълната повърхнина и обема на цилиндъра.
12. Два цилиндъра имат равни обеми. Докажете, че околните им повърхнини се отнасят обратнопропорционално на радиусите им.
13. Сборът от радиуса и височината на прав кръгов цилиндър е 18 cm, а околната му повърхнина е $144 \pi \text{ cm}^2$. Намерете радиуса и височината на цилиндъра.
14. Правоъгълник със страни 8 cm и 10 cm е завъртян около едната си страна. Намерете повърхнината и обема на полученото тяло.