

Здравка Паскалева, Мая Алашка, Пламен Паскалев, Райна Алашка

МАТЕМАТИКА

8

КЛАС

АрхИ(Μ)ΕΔ

ИЗДАТЕЛСТВО



Внимание! В учебника не се пише, чертае или огражда!

Означения, използвани в учебника:

О	Определение
Т	Теорема
П	Правило
!	Знания, които трябва да се запомнят
!	Основни знания
	Обърнете внимание! – пояснения към решението на задачите
	Интересни допълнения към учебния материал

1, 2, ... Задачи с повишена трудност

ЗАДАЧА 5 Решена задача с повишена трудност

Рецензенти: проф. д.п.н. Сава Гроздев
доц. д-р Драго Михалев
Владимир Николов

Консултант по графичния дизайн: проф. Илия Иванов Илиев

- © Издателство „Архимед 2“ ЕООД, 2024 г.
- © Здравка Крумова Паскалева, Мая Събчева Алашка, Пламен Георгиев Паскалев, Райна Милкова Алашка – автори, 2024 г.
- © Ангелина Владиславова Аврамова – графичен дизайн, 2024 г.
- © Ангелина Владиславова Аврамова – илюстрации, 2024 г.
- © Емил Генков Христов – художник на корицата, 2024 г.

ISBN: 978-954-779-337-8

СЪДЪРЖАНИЕ

ВХОДНО НИВО

1. Цели изрази. Уравнения и неравенства. Преговор	6
2. Триъгълник. Преговор	8
3. Тест с решения	10
4. Входно ниво. Примерни тестове	14

ТЕМА 1. ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПОНЯТИЯ

5. Събиране и умножение на възможности	18
6. Събиране и умножение на възможности. Упражнение	20
7. Пермутации	22
8. Вариации	24
9. Комбинации	26
10. Обобщение на темата „Основни комбинаторни понятия“	28

ТЕМА 2. ВЕКТОРИ

11. Вектор	32
12. Събиране на вектори	36
13. Събиране на вектори. Упражнение	40
14. Изваждане на вектори	42
15. Умножение на вектор с число. Свойства	44
16. Вектори. Приложения	46
17. Обобщение на темата „Вектори“	48
18. Тестове върху темата „Вектори“	51

ТЕМА 3. ТРИЪГЪЛНИК И ТРАПЕЦ

19. Делене на отсечки в дадено отношение	54
20. Средна отсечка в триъгълник	56
21. Средна отсечка в триъгълник. Упражнение	58
22. Медицентър на триъгълник	60
23. Медицентър на триъгълник. Упражнение	62
24. Трапец. Равнобедрен трапец	64
25. Трапец. Упражнение	66
26. Средна отсечка (основа) на трапец	68
27. Средна отсечка (основа) на трапец. Упражнение	70
28. Обобщение на темата „Триъгълник и трапец“	72
29. Тестове върху темата „Триъгълник и трапец“	75

ТЕМА 4. КВАДРАТЕН КОРЕН

30. Иррационални числа	78
31. Квадратен корен	80
32. Свойства на квадратните корени	82

33. Действия с квадратни корени	84
34. Действия с квадратни корени. Упражнение	86
35. Сравняване на ирационални числа, записани с квадратни корени	88
36. Преобразуване на изрази, съдържащи квадратни корени	90
37. Рационализиране на изрази, съдържащи квадратни корени	92
38. Обобщение на темата „Квадратен корен“	94
39. Тестове върху темата „Квадратен корен“	97

ТЕМА 5. КВАДРАТНИ УРАВНЕНИЯ

40. Квадратно уравнение. Непълни квадратни уравнения	100
41. Формула за корените на квадратното уравнение	102
42. Съкратената формула за корените на квадратното уравнение	104
43. Разлагане на квадратния тричлен на множители	106
44. Биквадратни уравнения	108
45. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни	110
46. Уравнения от по-висока степен, свеждащи се до квадратни. Упражнение	112
47. Зависимост между корените и коефициентите на квадратното уравнение. Формули на Виет	114
48. Приложение на формулите на Виет. Упражнение	116
49. Моделиране с квадратни уравнения	118
50. Обобщение на темата „Квадратни уравнения“	120
51. Тестове върху темата „Квадратни уравнения“	123

ТЕМА 6. ОКРЪЖНОСТ

52. Окръжност. Взаимни положения на точка и окръжност	126
53. Взаимни положения на права и окръжност	128
54. Допирателни към окръжност	130
55. Централни ъгли, дъги и хорди	132
56. Диаметър, перпендикулярен на хорда	134
57. Вписан ъгъл	136
58. Периферен ъгъл	138

59. Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност.....	140
60. Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност.....	142
61. Взаимно положение на две окръжности.....	144
62. Общи допирателни на две окръжности.....	146
63. Обобщение на темата „Окръжност“.....	148
64. Тестове върху темата „Окръжност“.....	151

ТЕМА 7. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

65. Рационални дроби. Дефиниционно множество.....	154
66. Основно свойство на рационалните дроби. Съкращаване и разширяване на рационални дроби.....	156
67. Привеждане на рационални дроби към общ знаменател.....	158
68. Събиране и изваждане на рационални дроби.....	160
69. Събиране и изваждане на рационални дроби. Упражнение.....	162
70. Умножение, деление и степенуване на рационални дроби.....	164
71. Преобразуване на рационални изрази.....	166
72. Преобразуване на рационални изрази. Упражнение.....	168
73. Дробни уравнения.....	170
74. Дробни уравнения. Упражнение.....	172
75. Моделиране с дробни уравнения.....	174
76. Обобщение на темата „Рационални изрази“.....	176
77. Тестове върху темата „Рационални изрази“.....	179

ТЕМА 8. ВПИСАНИ И ОПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

78. Окръжност, описана около триъгълник.....	182
79. Окръжност, описана около триъгълник. Упражнение.....	184
80. Окръжност, вписана в триъгълник.....	186
81. Окръжност, вписана в триъгълник. Упражнение.....	188
82. Външно вписани окръжности.....	190
83. Ортоцентър на триъгълник.....	192
84. Забележителни точки в триъгълника.....	194
85. Четириъгълник, вписан в окръжност.....	196
86. Четириъгълник, вписан в окръжност. Упражнение.....	198
87. Четириъгълник, описан около окръжност.....	200
88. Четириъгълник, описан около окръжност. Упражнение.....	202
89. Обобщение на темата „Вписани и описани многоъгълници“.....	204
90. Тестове върху темата „Вписани и описани многоъгълници“.....	207

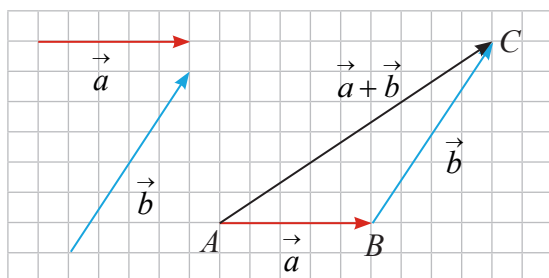
ИЗХОДНО НИВО

91. Подготовка за изходно ниво № 1.....	210
92. Подготовка за изходно ниво № 2.....	212
93. Тест с решения.....	214
94. Изходно ниво. Примерни тестове.....	218

ОТГОВОРИ.....	220
---------------	-----

12. СЪБИРАНЕ НА ВЕКТОРИ

Правило на триъгълника



Дадени са два вектора \vec{a} и \vec{b} .

Извършваме следното построение:

- избираме произволна точка A ;
- с начало A построяваме $\vec{AB} = \vec{a}$;
- с начало B построяваме $\vec{BC} = \vec{b}$.

Край на първия вектор е **начало** на втория.

Векторът \vec{AC} наричаме **сбор** на векторите \vec{a} и \vec{b} и го означаваме с $\vec{a} + \vec{b}$.

Когато векторите \vec{a} и \vec{b} не са колинеарни, даденото по определение правило за построяване на сбора им се нарича **правило на триъгълника**.

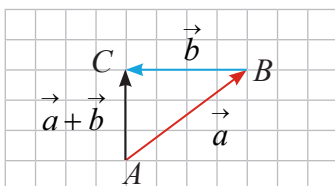
ЗАДАЧА 1 В квадратна мрежа са дадени векторите \vec{a} и \vec{b} .

Начертайте вектора:

а) $\vec{a} + \vec{b}$;

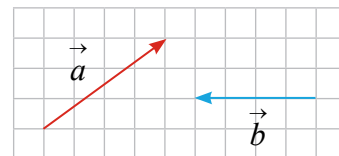
Решение:

а)

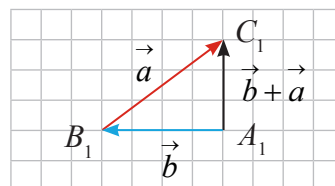


1. Избираме произволна точка A .
2. Построяваме насочена отсечка \vec{AB} , която е представител на вектора \vec{a} .
3. Построяваме насочена отсечка \vec{BC} , която е представител на вектора \vec{b} .
4. Насочената отсечка \vec{AC} е представител на вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

б) $\vec{b} + \vec{a}$.



б)



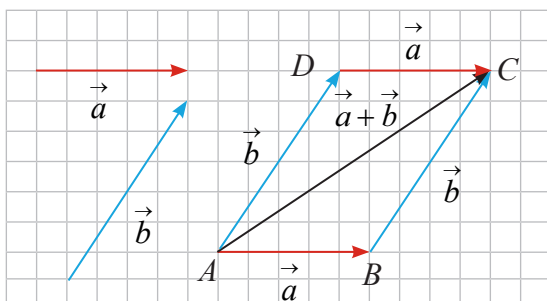
1. Избираме произволна точка A_1 .
2. Построяваме насочена отсечка $\vec{A_1B_1}$, която е представител на вектора \vec{b} .
3. Построяваме насочена отсечка $\vec{B_1C_1}$, която е представител на вектора \vec{a} .
4. Насочената отсечка $\vec{A_1C_1}$ е представител на вектора $\vec{b} + \vec{a}$.



В Задача 1 получихме, че $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Когато векторите \vec{a} и \vec{b} не са колинеарни, сборът $\vec{a} + \vec{b}$ може да се построи и по **правилото на успоредника**.

Правило на успоредника



Дадени са два вектора \vec{a} и \vec{b} .

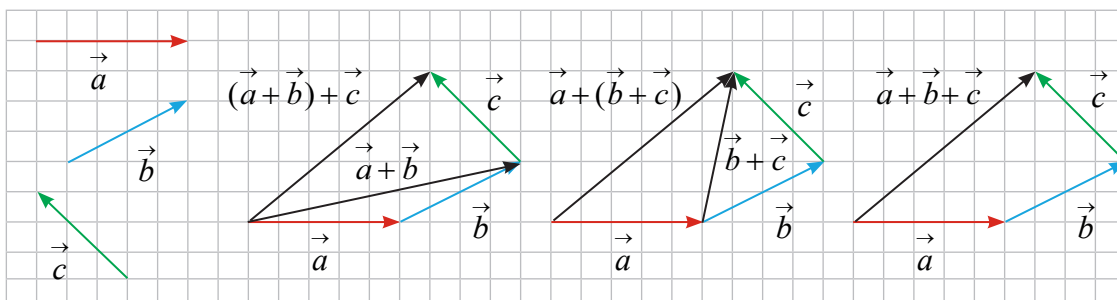
Извършваме следното построение:

- избираме произволна точка A ;
 - с начало A построяваме $\vec{AB} = \vec{a}$;
 - с начало A построяваме $\vec{AD} = \vec{b}$;
 - построяваме успоредника $ABCD$.
- \vec{AC} е търсеният сбор $\vec{a} + \vec{b}$.



Сборът на произволни два вектора \vec{a} и \vec{b} не зависи от началната точка и от реда на събираемите, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативен закон).

Като използваме правилото на триъгълника, може да съберем и повече от два вектора.



Сборът на повече от два вектора може да се построи и без да го свеждаме до построяване на сбор на два вектора.



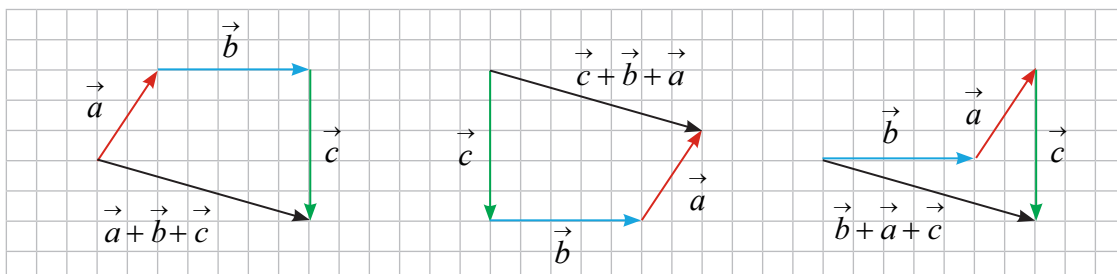
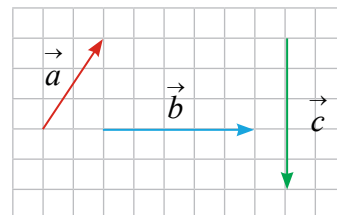
При събирането на три произволни вектора е в сила асоциативният закон $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

ЗАДАЧА 2 В квадратна мрежа са дадени векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Начертайте векторите $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$.

Решение:

Нанасяме всеки следващ вектор така, че началото му да съвпадне с края на предишния. Сборът им е вектор с начало началото на първия и край крайт на последния вектор.



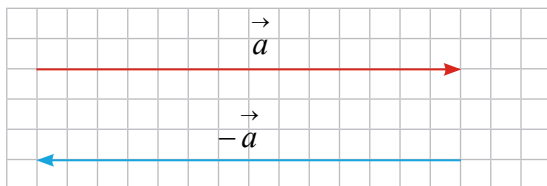
ЗАДАЧА 5 Начертайте сбора на вектора \vec{a} със:

а) противоположния му вектор;

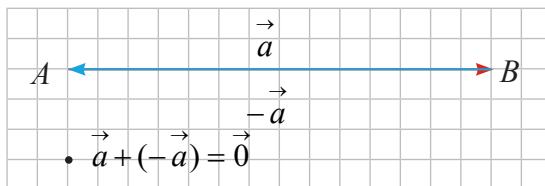
б) нулевия вектор.

Решение:

а) Дадено:



Построение:



Сборът на два противоположни вектора е вектор, чиито начало и край съвпадат, т.е. нулевият вектор.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

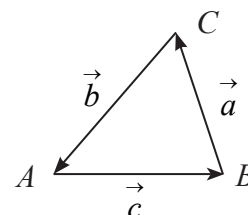
б) $\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}$



Сборът на даден вектор \vec{a} с нулевия вектор е вектор, равен на дадения.

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

ЗАДАЧА 6 Даден е произволен $\triangle ABC$. Ако върху страните му са избрани векторите $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$ и $\vec{CA} = \vec{b}$, докажете, че $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.



Решение:

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \vec{0} \end{aligned}$$



Практическо правило

При сбор на два вектора, ако от двете страни на знака „+“ има една и съща буква, я премахваме и получаваме вектора, който е сборът.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ЗАДАЧИ

1. Дадени са векторите \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} върху квадратна мрежа. Начертайте:

а) $\vec{m}_1 = \vec{b} + \vec{a}$; б) $\vec{m}_2 = \vec{b} + \vec{d}$;

в) $\vec{m}_3 = \vec{c} + \vec{d}$; г) $\vec{m}_4 = \vec{d} + \vec{a}$;

д) $\vec{m}_5 = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$; е) $\vec{m}_6 = \vec{c} + \vec{b} + \vec{d}$.

Упътване: Можете да използвате дадените вектори в *Задача 3* от урока.

2. Дадени са векторите \vec{a} и \vec{b} , като $|\vec{a}| = 2 \text{ cm}$ и $|\vec{b}| = 3 \text{ cm}$. Начертайте вектора $\vec{a} + \vec{b}$, ако \vec{a} и \vec{b} са:

а) еднопосочни;

б) противоположни.

3. Дадени са два неколинеарни вектора \vec{u} и \vec{v} . Начертайте вектора $\vec{u} + \vec{v}$, като използвате правилото на успоредника.

4. Дадени са отсечка MN и точка O . Изразете вектора \vec{MN} като сбор на два вектора, краищата на които са в точките M , N и O . Кога двата събираеми вектора са колинеарни?