

Съдържание

Предговор към изданието на ГЕБ по случай двайсетата годишнина	7
Кратък обзор	41
Списък на илюстрациите	51
Благодарности	56

Част I ГЕБ

Интродукция: Музикално-логическо приношение	63
<i>Тригласна инвенция</i>	99
Глава I	
Загадката MU	105
<i>Двугласна инвенция</i>	117
Глава II	
Смисъл и форма в математиката	123
<i>Соната за соло Ахил</i>	145
Глава III	
Фигура и фон	149
<i>Контракростиопункт</i>	163
Глава IV	
Непротиворечивост, пълнота и геометрия	173
<i>Малък хармоничен лабиринт</i>	203
Глава V	
Рекурсивни структури и процеси	233
<i>Канон с удължаване на интервалите</i>	267

Глава VI	
Мястото на смисъла.....	275
<i>Хроматична фантазия и сблъсък</i>	301
Глава VII	
Пропозиционално смятане.....	307
Глава VIII	
Типографска теория на числата	345
<i>Му приношение</i>	381
Глава IX	
Мумон и Гьодел	401

ЧАСТ II

ЕГБ

<i>Прелюдия</i>	440
Глава X	
Нива на описание и компютърни системи.....	453
<i>...и мравешка fuga</i>	489
Глава XI	
Мозък и мисли.....	525
<i>Английско-френско-немска сюита</i>	566
<i>Славянски танци</i>	570
Глава XII	
Разум и мисли	575
<i>Ария с различни вариации</i>	605
Глава XIII	
VlooP, FlooP и GlooP	625
<i>Мелодия в G</i>	661
Глава XIV	
Относно формално неразрешимите твърдения в ТТЧ и сродни системи	669

<i>Рождена кантататата...</i>	701
Глава XV	
Да изскочиш от системата	707
<i>Поучителни мисли на един пушач на тютюн</i>	729
Глава XVI	
Самопозоваване и самовъзпроизвеждане	749
<i>Магнификак, бре!</i>	827
Глава XVII	
Чърч, Тюринг, Тарски и други	841
<i>SHRDLU нашата е гордост</i>	879
Глава XVIII	
Изкуствен интелект: ретроспекция	889
<i>Контрафакт</i>	945
Глава XIX	
Изкуствен интелект: перспективи	957
<i>Канон на ленивеца*</i>	1014
Глава XX	
Странни цикли, или оплетени йерархии	1018
<i>Шестгласен ричеркар</i>	1070
Бележки	1113
Библиография	1117

Предговор към изданието на ГЕБ по случай двайсетата ѝ годишнина

Всъщност за какво *наистина* става дума в тази книга, „Гьодел, Ешер, Бах: една гирлянда към безкрайността“, позната и под съкращението „ГЕБ“?

Този въпрос ме преследва още откакто нахвърлях първите ѝ чернови с химикалка през далечната 1973 г. Естествено, приятелите ме разпитваха какво ме е обсебило така, но съвсем не ми беше лесно да отговоря накратко. Няколко години по-късно, през 1980 г., когато ГЕБ се озова за известно време в списъка на бестселърите на „Ню Йорк таймс“, в продължение на няколко седмици задължителното резюме от едно изречение под заглавието гласеше: „Учен твърди, че реалността е система от взаимосвързани гирлянди“. След като яростно протестирах срещу тази абсолютна нелепост, накрая го замених с нещо малко по-добро, вярно точно колкото пак да не надам вой.

Много хора мислят, че заглавието обяснява всичко: книга за математик, художник и музикант. Но и най-беглият поглед показва, че точно тези трима души, колкото и неоспоримо велики да са, играят минимална роля в изложението. Няма начин книгата да е за тях тримата!

Тогава не може ли да опишем ГЕБ като „книга, която показва, че математиката, изобразителното изкуство и музиката по същество са едно и също нещо“? Това също е неопишуемо далеч от целта – и въпреки това съм го чувал отново и отново, при това не само от непочели книгата, но и от нейни читатели, дори от ревностни читатели.

А в книжарниците съм виждал ГЕБ да украсява лавиците на най-различни раздели, не само математика, обща наука, философия и когнитивна наука (които са приемливи), но и религия, окултизъм и бог знае какво още. Защо е толкова трудно да се разбере за какво става дума в тази книга? Със сигурност не е само заради обема ѝ. Вероятно поне отчасти причината е свързана с това, че ГЕБ покрива, и не просто повърхностно, тъй разнородни теми – фуги и канони, логика и истина, геометрия, рекурсия, синтактични структури, естеството на значението, дзен будизъм,

парадокси, мозък и разум, редукионизъм и холизъм, колонии от мравки, понятия и ментални репрезентации, превод, компютри и техните езици, ДНК, белтъци, генетичният код, изкуствен интелект, творчески способности, съзнание и свободна воля – понякога дори изкуство и музика, да не повярва човек!, – че за много хора се оказва невъзможно да определят основния фокус.

Ключовите образи и идеи в основата на ГЕБ

Излишно е да обяснявам, че това тъй разпространено объркване беше за мен постоянен източник на раздражение през годините, понеже бях сигурен, че ясно съм изказал целите си в текста, при това неведнъж. Но явно не съм го направил достатъчно често или пък достатъчно ясно. А тъй като сега имам възможността да го направя още веднъж – при това на тъй забележимо място в книгата, – ще опитам за последен път да кажа защо написах тази книга, за какво се разказва в нея и каква е основната ѝ теза.

Накратко, ГЕБ е много личен опит да разкажа как става така, че от неодоушевена материя може да се получат одушевени неща. Какво е личността и как тя се получава от обекти, безлични като камъка или локвата? Какво е Азът и защо неща като него се срещат (поне досега) единствено свързани с „полюшващи се буци с ужас и мечти“, ако използваме прекрасната фраза на поета Ръсел Едсън – тоест свързани само с определен вид лигава маса, затворена в твърда защитна обвивка, покачена на върха на подвижна платформа, която се скита по света на две леко мъхнати сгъващи се опори?

ГЕБ подхожда към тези въпроси, като постепенно изгражда аналогия, която оприличава неодоушевените молекули на безсмислени символи и допълнително уподобява личността (или Аза, или „душата“, ако предпочитате – както и да наричаме онова, което отличава одушевената от неодоушевената материя) на особена завъртяна, извиваща се, вихроподобна и смислена структура, която възниква само в определен тип системи от безсмислени символи. Точно на тези странни, завъртени структури отделя толкова много време книгата, понеже те са слабо познати, недостатъчно оценени, антиинтуитивни и покрити с тайнственост. По причини, които не е трудно да бъдат разбрани, в книгата наричам тези странни, циклични структури „странни цикли“, макар че в

последните глави използвам и израза „оплетени йерархии“ като обозначение на практически същата идея.

До голяма степен затова М. Ешер – или по-точно, неговото изкуство – заема такова важно място в „безкрайната гирлянда“, понеже и той, по собствения си неповторим начин, е бил очарован, също като мен, от странните цикли и всъщност ги *рисува* в най-различен контекст, винаги възхитително объркващи и завладяващи. Но в самото начало, когато започнах работа по книгата, Ешер изобщо не присъстваше в картината; работното ми заглавие беше съвсем баналната фраза „Теоремата на Гьодел и човешкият мозък“ и изобщо не си бях помислял да включа в нея парадоксални картини, камо ли закачливи диалози. Просто докато описвах идеята си за странните цикли, пред вътрешното ми око най-редовно проблясваше, почти подпратово, една или друга гравюра на Ешер, докато накрая осъзнах, че тези образи са тъй свързани в ума ми с идеите, за които пиша, че да лиша читателите си от тази връзка, която чувствах така силно, би било направо престъпно. И тъй изкуството на Ешер беше посрещнато на борда с отворени обятия. Що се отнася до Бах, ще се спра на неговото включване малко по-късно в „метафоричната fuga върху разума и машините“.

А сега да се върнем към странните цикли. ГЕБ беше вдъхновена от отдавнашното ми убеждение, че идеята за „странен цикъл“ съдържа ключа за разгадаването на мистерията, която ние, разумните същества, наричаме „съществуване“ или „съзнание“. Тази идея ме порази за пръв път, когато още като юноша се оказах обзет от натрапчиви размисли върху класическия странен цикъл в основата на доказателството на знаменитата теорема за непълнота на Курт Гьодел от математическата логика – твърде екзотично място, можем да кажем с чиста съвест, да се натъкнеш на тайната за естеството на личността и Аза, но въпреки това аз почти успях да чуя как страниците на книгата на Нейджъл и Нюман ми крещат, че точно за това става дума.

Този предговор не е подходящото място да се впускам в подробности – всъщност нали затова е написана книгата, която държите, тъй че би било малко самонадеяно от моя страна да смятам, че мога да надмина автора ѝ в тези едва няколко страници!, – но едно трябва да се каже направо: странният цикъл от гьоделов тип, който се появява във формалните системи на математиката

(т.е. в съвкупности от правила за произвеждане на безкрайна редица математически истини единствено чрез механично манипулиране на символи без какъвто и да е интерес към евентуалните значения или идеи, скрити в обработваните форми) е цикъл, който позволява на такава система да „възприеме самата себе си“, да говори за себе си, да стигне до „самоосъзнаване“ и в известен смисъл няма да е прекалено да кажем, че когато притежава такъв цикъл, формалната система *придобива измерения на личност*.

Безсмислените символи придобиват смисъл въпреки самите себе си

Най-необикновеното във всичко това е, че формалните системи, където се появяват тези зачатъчни личности, са изградени не от друго, а от безсмислени символи. Личността възниква просто заради особен вид завъртяна, оплетена *структура* сред безсмислените символи. Но ще призная нещо: допускам известна неточност, като повтарям израза „безсмислени символи“ (както в предишните две изречения), понеже съществена част от доводите на книгата ми почива върху идеята, че не може да се избегне навлизането на смисъл във формалните системи, когато се появят достатъчно сложни изоморфизми. Смисълът идва въпреки всички усилия да запазим символите безсмислени!

Нека изкажа последните две изречения без донякъде техническия термин „изоморфизъм“. Когато една система от „безсмислени“ символи съдържа в себе си структури, които точно проследяват или отразяват различни явления в света, тогава това проследяване или отражение придава на символите известно количество смисъл – и наистина, проследяването или отражението е ни повече, ни по-малко онова, което е смисълът. Според това колко сложно, деликатно и надеждно е проследяването възниква различна степен на смисленост. Няма да се задълбочавам повече по този въпрос сега, понеже тази теза се излага достатъчно често в текста, най-вече в глави 2, 4, 6, 9 и 11.

В сравнение с типичната формална система човешкият език е невероятно подвижен и фин в своите структури за проследяване на реалността и заради това символите във формалните системи може да изглеждат доста сухи; всъщност без особено налягане можем да ги разглеждаме като напълно лишени от смисъл. Но

пък можем да гледаме и вестник, написан с непозната писмена система, а странните ѝ форми за нас няма да бъдат нищо повече от удивително сложни, но абсолютно безсмислени структури. Така дори от езика на хората с цялото му богатство може да бъде отнета привидната му значимост.

Всъщност все още има предостатъчно философи, учени и други, които вярват, че структурите от символи сами по себе си (например книги, библиотеки, компактдискове, компютърни програми, независимо колко сложни и динамични) *никога* нямат собствено значение, а вместо това то, по някакъв тайнствен начин, изниква единствено от органичната химия или може би от квантовата механика на процесите, които се случват в основаните на въглерод биологични мозъци. Въпреки че съм твърдо против този ограничен, бишовинистичен възглед, все пак доста добре разбирам интуитивната му привлекателност. Като се опитам да се поставя на мястото на вярващ в превъзходството, дори в уникалността на мозъка, виждам на какво се основават тези хора.

Те смятат, че някаква „семантична магия“ се случва единствено в нашите „полюшващи се буци“, някъде зад чифта очи, въпреки че така и не могат да обяснят съвсем точно как или защо става така; освен това те смятат, че на тази семантична магия се дължи съществуването на човешката личност, душа, съзнание, Аз. Авсъщност аз съм напълно съгласен с тези мислители, че личността и семантиката – с други думи, мисълта и смисълът – *наистина* произлизат от един и същ източник; несъгласието ми с тези хора е свързано с твърдението им, че тези явления се дължат изцяло на някакви специални, макар и още неоткрити, свойства на микроскопичния хардуер на мозъка.

Според мен единственият начин да се преодолее този магически възглед за Аза и съзнанието е неспирно да си напомняме, колкото и да е неприятно, че „полюшващата се буца с ужас и мечти“, надеждно скрита в черепа на човек, е чисто физически обект, изграден от напълно стерилни и неодушевени съставни части, които се подчиняват на абсолютно същите закони, управляващи цялата останала вселена, включително откъсите от текст, компактдисковете или компютрите. Само ако човек непрестанно се тормози с този смущаващ факт, може постепенно да налучка решението на мистерията на съзнанието: ключът не е *материя-*

лт, от който е направен мозъкът, а *структурите*, които могат да възникнат в този материал.

Това е освобождаващ обрат, понеже позволява да минем към ново ниво на разглеждане на мозъка: като *среда*, поддържаща сложни структури, които, макар и далеч не съвършено, отразяват света, на който, естествено, самият мозък е жител – и в неизбежно възникващото самоотразяване, колкото и несъвършено или непредубедено да е, започват да се вият странните цикли на съзнанието.

Курт Гьодел пробива линията „Мажино“ на Бъртранд Ръсел

Току-що обявих, че изместването на фокуса от веществените градивни елементи към абстрактни структури позволява да се състои квазимагическият скок от неодоушевно към одоушевно, от несемантично към семантично, от безсмислено към смислено. Но как става това? Все пак, очевидно не *всички* скокове от вещество към структури водят до създаване, душа или личност: с една дума, не всички структури са разумни. Тогава каква е структурата, която е отличителен признак на личността? Отговорът на ГЕБ: странен цикъл.

По ирония първият странен цикъл – и мой модел за понятието като цяло – е открит в система, *специално проектирана да не допуска цикличност*. Става дума за знаменития трактат на Бъртранд Ръсел и Алфред Норт Уайтхед „Principia Mathematica“, гигантско, непристъпно произведение с тежка и отблъскваща символика, изпълваща няколко тома, чието създаване между 1910 и 1913 г. е предизвикано най-вече от отчаяното желание на Ръсел да открие начин да бъдат заобиколени парадоксите на самопозоваването в математиката.

В основата на „Principia Mathematica“ се намира тъй наречената „теория на типовете“ на Ръсел, която, подобно на малко покъснатата линия „Мажино“, е създадена като непробиваема преграда с цел да държи надалеч „врага“. За Франция врагът е Германия, за Ръсел това е самопозоваването. Ръсел смята, че ако дадена математическа система може да говори за себе си по какъвто и да е начин, това е равносилно на целувката на смъртта, понеже самопозоваването, според него, неизбежно открива пътя към вътреш-

ни противоречия и съответно срива постройката на цялата математика. За да предотврати такова пагубно развитие, той измисля сложна (и безкрайна) йерархия от нива, изолирани едно от друго така, че веднъж завинаги, смята той, да попречат на ужасяващия вирус на самопозоваването да зарази крехката система.

Нужни са двайсетина години, но в крайна сметка младият австрийски логик Курт Гьодел разбира, че създадената от Ръсел и Уайтхед математическа линия „Мажино“ срещу самопозоваването може да бъде изкусно заобиколена (както не след дълго немците в началото на Втората световна война изкусно заобикалят истинската линия „Мажино“) и че самопозоваването не само се крие в „Principia Mathematica“ от самото начало, но и няма начин да бъде премахнато от бедната РМ. Освен това, както Гьодел показва безмилостно ясно, изпълнението всички ъгълчета на системата самопозоваване се дължи не на някаква слабост на РМ, а точно обратното, на нейната *сила*. Всяка подобна система би имала точно същия „дефект“. А на света му трябвало толкова време да осъзнае този изумителен факт, защото за да се стигне до него трябва да се направи скок, донякъде подобен на прехода от мозък към личност, удивителния скок от неодоушевени градивни елементи към одушевени структури.

За Гьодел всичко започва да идва на мястото си някъде около 1930 г. благодарение на едно просто, но чудно богато откритие, станало известно като „гьоделово номериране“ – съответствие, при което дълги последователности от символни низове в произволна формална система се отразяват точно от математически отношения между определени цели числа (обикновено с астрономическа големина). С помощта на това съответствие между сложни структури от безсмислени символи (да употребим още веднъж този съмнителен термин) и огромни числа Гьодел показва как твърдение *за* всяка математическа формална система (като твърдението, че „Principia Mathematica“ не съдържа противоречия) може да бъде преведено в математическо твърдение *в* теорията на числата (науката за целите числа). С други думи, всяко метаматематическо твърдение може да бъде пренесено *в* математиката и под тази нова форма то просто заявява (като всички твърдения от теорията на числата), че определени цели числа имат някакви свойства или се намират в някакви отношения помежду си. Но на друго ниво то има и съвсем различно значение,

което на пръв поглед изглежда тъй далече от твърдение на теорията на числата, колкото и изречение от роман на Достоевски.

Посредством Гюделовото изобразяване всяка формална система, проектирана да произвежда истини за „обикновените“ числа, в крайна сметка ще произвежда и истини за собствените си свойства – без да иска, но и без да може да го избегне – и така ще стане „самоосъзната“ в известен смисъл. А от всички скрити случаи на самопозоваване, поразили РМ и извадени на бял свят от Гюдел, най-тежко е положението с изреченията, които говорят за *собствените си* гюделови номера и особено с тези, които казват много странни неща за себе си, като например „Аз не съм доказуемо в РМ“. И нека повторя: това извиване назад, завъртане в кръг, самообхващане съвсем не е дефект, който може да се премахне, а неизбежен епифеномен, дължаш се на огромната мощност на системата.

Не е изненадващо, че внезапното разкритие на Гюдел, че самопозоваването процъфтява в лоното на бастиона, тъй внимателно проектиран от Ръсел на всяка цена да го държи надалеч, води до най-различни революционни математически и философски последици; най-знаменитото следствие е тъй наречената „съществуваща непълнота“ (известна още като непопълнимост) на формализираната математика. Това понятие ще бъде внимателно разгледано в идните глави, но все пак, колкото и увлекателна да е, непълнотата сама по себе си не е основна част от тезата на ГЕБ. За ГЕБ най-същественният аспект от работата на Гюдел е, че тя показва как *значението* на едно твърдение може да има дълбоки последици, дори и в предполагаемо лишена от значение вселена. *Смисълът* на изречението на Гюдел G (онова, което заявява „ G не е доказуемо в РМ“) е онова, което гарантира, че G не е доказуемо в РМ (което е точно онова, което самото G твърди)*. Като че ли скритият гюделовски смисъл на изречението има някаква сила над безсъдържателните манипулации със символи и непризнаващите никакъв смисъл правила на системата и не им позволява никога да стигнат до доказателство на G , независимо какво правят.

* Тук и по-нататък в текста английската дума meaning се предава с думите „значение“ и „смисъл“, които се използват като синоними, без да се влага разликата, която се прави във философията и други научни дисциплини.
– Б. пр.

Обърнатата причинност и произходът на Аза

Този ефект ни създава усещане за смахнато изкривена, или обърнатата, причинност. Все пак не трябва ли да няма никакво значение какъв е смисълът, който човек избира да намери в нивове от безсмислени символи? Още по-странно е, че *единствената причина* изречението G да не е доказуемо в рамките на РМ е неговият самопозоваващ се смисъл; наистина, изглежда, че след като G е *истинно* твърдение за целите числа, то *трябва* да е доказуемо, но – благодарение на допълнителното си ниво на значение като твърдение за самото себе си, заявяващо собствената си недоказуемост – то не е.

Така от Гьоделовия цикъл произлиза нещо много странно: разкритието за причинната сила на значението във вселена, обвързана от правила, но лишена от значение. И точно тук аналогията ми с мозъците и личностите се завръща, като подсказва, че усуканият цикъл на *личностност*, затворен в неодоушевена буца на име мозък, също има причинна сила – или, казано с други думи, че една обикновена структура на име „Аз“ може да прехвърля насам-натам неодоушевени частици в мозъка със същия успех, с който неодоушевени частици в мозъка могат да прехвърлят насам-натам структури. Накратко, Азът възниква – поне според мен – от нещо като вихър, чрез който структурите в мозъка отразяват отражението на света от страна на мозъка и в крайна сметка отразяват себе си, при което вихърът на Аза става реален, причинен обект. Като не съвсем точна, но ярка конкретна аналогия на това необикновено абстрактно явление си представете какво се случва, когато телевизионна камера бъде насочена към телевизионен екран, тъй че да покаже екрана в самия него (и този екран в себе си и т.н.) – онова, което в ГЕБ нарекох „самопоглъщаща се телевизия“, а в по-късните ми произведения понякога наричам „пресичащ нивата цикъл на обратна връзка“.

Тогава и само тогава, когато в мозъка или в каквато и да е друга среда възникне такъв цикъл, се появява на бял свят *личност*, уникално ново Аз. Освен това, колкото по-богат откъм самопозоваване е такъв цикъл, толкова по-съзнателна е породената от него личност. Колкото и шокиращо да звучи, съзнанието не е явление с две положения, „има – няма“, а позволява степени, категории, отсенки. Или, ако го кажем по-грубо, има по-големи души и по-малки души.

Хора с малки души, внимавайте!

И тук не мога да не си припомня ужасно високомерната, но забавна забележка от един от любимите ми писатели, американския „критик на седемте изкуства“ Джеймс Хюнекър, в блестящата му биография на Фредерик Шопен относно етюда на Шопен оп. 25, № 11 в ла минор, който за мен, както и за Хюнекър, е едно от най-вълнуващите и най-възвишени музикални произведения, създавани някога: „Хората с малки души, независимо колко ловки са пръстите им, по-добре да го избягват“.

„Хора с малки души“?! Брей! И *това* ако не е в разрез с американската демокрация! Все пак, ако оставим настрана нейния обиден, архаичен сексизъм* (престъпление, което за мое голямо съжаление извършвам и аз в ГЕБ), смея да предположа, че само защото всички ние мълчаливо *вярваме* в нещо като шокиращото разграничение на Хюнекър, повечето от нас нямат нищо против да ядат най-различни животни, да размазват мухи, да мачкат комари, да унищожават бактерии с антибиотици и тъй нататък. Обикновено сме на едно и също мнение, че „хора“ като крави, пуйки, жаби, риби притежават *някаква* искрица съзнание, *някакъв* вид примитивна „душа“, но тя е много, много по-малка от *нашата* – и точно затова ние, „хората“, смятаме, че имаме пълно право да загасим мъждукащите светлинки в главите на тези създания с частична душа и да лапаме с безгранична наслада тяхната доскоро топла и мърдаща, а сега охладена и неподвижна протоплазма, без при това да чувстваме и капчица вина.

Стига проповеди! Същинската идея тук е, че не всички страници цикли пораждат души, тъй славни и великолепно като вашата и моята, уважаеми читателю. И не бих искал вие или някой друг да прочете цялата ГЕБ или част от нея, а след това да поклати глава и да каже тъжно: „Този чудак Хофстатър е убедил себе си, че „Principia Mathematica“ на Ръсел и Уайтхед е съзнателна личност с душа!“ Дрън-дрън, ярина! Врели-некипели! Пълни глуposti! Странният цикъл на Гъдел, макар и предпочитаният от мен пример за това понятие, е възможно най-простият странен цикъл, при това се намира в система, чиято сложност е жалка в

* Английският израз използва думата „men“, едно от основните значения на която е „мъже“. – Б. пр.

сравнение с тази на всеки органичен мозък. Освен това формалните системи са статични, те не се изменят или растат с течение на времето. Формалните системи не живеят в общество от други формални системи, не ги отразяват в себе си, нито на свой ред се отразяват в „приятелите“ си. Е, поне отчасти ще трябва да оттегля последната забележка: всъщност всяка формална система с мощността на РМ съдържа модели не само на себе си, но и на безкраен брой други формални системи, някои много приличащи на нея, други нямащи почти нищо общо. По същество това установява Гьодел. Но все пак в случая не съществува нищо аналогично на времето, на развитието, камо ли на раждането и смъртта.

И тъй, каквото и да казвам за „личности“, които се появяват в математически формални системи, то трябва да бъде приемано с нужната доза съмнение. Странните цикли са абстрактна структура, която изниква в различни среди и има различна ценност. ГЕБ е по същество една обширна метафора за странните цикли като образ на това, как възниква личността, метафора, с чиято помощ да почнем да проумяваме какво е онова, което кара Аза да изглежда на притежателя си тъй ужасно реален и веществен и същевременно тъй неясен, неразбираем, неуловим.

Лично аз не мога да си представя, че съзнанието ще бъде разбрано напълно, без да се прибегне до странни цикли от гьоделов тип или до пресичащи нивата цикли на обратна връзка. Затова бях изненадан и озадачен, че сред изобилието от книги, публикувани през последните няколко години и опитващи се да разплетат тайните на съзнанието, не се казва почти нищо в тази насока. Много от авторите на тези книги дори са чели и са се наслаждавали на ГЕБ, но никъде не се забеляза отзвук на основната ѝ теза. Понякога имам чувството, че съм изкрещял дълбоко съкровено послание в бездънна пропаст и никой не ме е чул.

Първите семена на ГЕБ

Някои сигурно се питат защо, ако целта на автора е била просто да предложи теория за странните цикли като основа на съзнанието ни и източник на неудържимото усещане за Аз, е написал такава огромна книга с толкова много привидни отклонения? Защо изобщо е набъркал фуги и канони? Защо и рекурсия? И дзен? И молекулярна биология, и прочие...

В действителност, когато започнах, нямах ни най-малка представа, че накрая ще говоря за всички тези неща. Нито пък съм предполагал, че бъдещата ми книга ще съдържа диалози, камо ли диалози, основани на музикални форми. Сложният и амбициозен характер на проекта ми се разви постепенно. Най-общо, ето какво се случи.

По-рано споменах как като тинейджър четох малката книга на Ърнест Нейджъл и Джеймс Нюман „Доказателството на Гъдел“. Е, за мен тази книга просто излъчваше плам и дълбочина и ме насочи към изучаването на символна логика. И тъй като студент по математика в университета „Станфорд“, а след няколко години и по време на краткия ми престой в магистърската програма по математика в университета в Бъркли се записах на няколко курса по логика за напреднали, но за мое огромно разочарование всички те бяха тясно специализирани, само за посветени и абсолютно лишени от магията на Нейджъл и Нюман. Крайният резултат от тези претенциозни курсове беше, че страстният ми юношески интерес към чудното доказателство на Гъдел и неговата „странна цикличност“ беше почти убит. И наистина бях получил такова усещане за стерилност, че в края на 1967 г., почти отчаян, се отказах от магистърската програма по математика в Бъркли и възприех нова самоличност като магистър по физика в Университета на Орегон в Юджийн, където някога ревностното ми влечение към логиката и метаматематиката заспа дълбок зимен сън.

Минаха няколко години, когато в един ден през май 1972 г., докато разглеждах секцията за математика в книжарницата на Университета на Орегон, попаднах на великолепната книга на философа Хауърд Делонг „Кратък очерк по математическа логика“, рискувах да я купя и след няколко седмици старата ми любов към гъделовските тайни и всичко, свързано с тях, се пробуди. В моята полюшваща се буца с ужас и мечти започнаха да се надпреварват като луди какви ли не идеи.

Независимо от тази радост, бях много обезкуражен от начина, по който се развиваше следването ми по физика и животът ми като цяло, тъй че през юли опаковах вещите си в десетина кашона и се отправих на изток, на пътешествие през Америка, с Куиксилвър, моя верен „Мъркюри“, модел 1956 г. Накъде точно отивах, не знаех. Знаех само, че търся нов живот.

След като прекосих прекрасните Каскадни планини и пустинята на източен Орегон, се озовах в Москоу, щата Айдахо. По-неже Куиксилвър имаше проблеми с двигателя и се нуждаеше от малък ремонт, използвах свободното време и отидох в библиотеката на Университета на Айдахо, за да потърся някои от статиите за доказателството на Гьодел от аотираната библиография на Делонг. Копирах някои от тях и след около ден заминах към Монтана и Албърта. Всяка вечер спирах и разпъвах малката си палатка, понякога в гора, понякога край езеро, и на светлината на фенерчето се потапах в статиите, докато не заспах в спалния чувал. Започвах да разбирам много гьоделовски въпроси по-добре и научавах невероятно увлекателни неща.

От писмо през брошура до семинар

След няколко дни в канадските Скалисти планини тръгнах на юг и накрая стигнах в Боулдър, щата Колорадо. Там един следобед избликнаха свежи идеи, които започнах да излагам в спонтанно писмо към стария ми приятел Робърт Боунингър. След няколко часа писане видях, че макар писмото ми да е по-дълго от очакваното – трийсетина написани на ръка страници, – съм казал едва половината от онова, което исках да кажа. Това ме накара да се замисля, че може би трябва да напиша брошура, а не писмо, и до ден днешен Робърт така и не е получил незавършеното ми послание.

От Боулдър тръгнах на изток, прескачайки от един университетски град към друг, и накрая, като че ли зовял ме през цялото време, като крайна цел пред мен се очерта Ню Йорк. И наистина, прекарах няколко месеца в Манхатън, като посещавах курсове за магистърска програма в „Сити колидж“ и преподавах елементарна физика на медицински сестри в „Хънтър колидж“, но с изтичането на 1973 г. осъзнах, че макар много страни на Ню Йорк да ми харесват, изпитвам още по-голямо безпокойство, отколкото в Юджийн, затова прецених за по-разумно да се върна в Орегон и да завърша магистърския курс там.

Въпреки че „новият живот“, на който се надявах, не се осъществи, в някои отношения се почувствах облекчен, когато се върнах. Най-малкото, в онези дни Университетът на Орегон имаше напредничавата политика всеки студент да може да измисли и

да води курс, който носи кредити, стига поне един департамент да го одобри. Така че се обърнах към департаментите по философия и по математика с молба за попечителство над курс, съсредоточен върху теоремата на Гъдел, и искането ми бе удовлетворено. Нещата започваха да се подреждат.

Интуитивно усещах, че личната ми страст към странните цикли – не само философски важни, но и естетически очарователни – не е просто някаква уникална за мен невротична натрапчива идея, а може да бъде и заразна, стига да успее да внуша на студентите си, че тези понятия са всичко друго, но не и скучни и сухи, както ги представяха ледените, стерилни курсове по логика, а освен това са дълбоко свързани – както намекуват Нейджъл и Нюман – с множество фундаментални и красиви идеи в математиката, физиката, компютърните науки, психологията, философията, лингвистиката и други.

Дадох на курса си полуоткаченото, полуромантично име „Мистерията на неразрешимото“ с надеждата, че ще привлече студенти от най-различни области, и номерът успя. Бяха заловени 25 души и всички бяха пълни с ентузиазъм. Живо си спомням прекрасните цветове, които виждах от прозореца по време на лекциите онази пролет, но още по-живо си спомням Дейвид Джъстман, който следваше история на изкуството, Скот Буреш, следващ политология, и Аврил Гринбърг, която учеше изкуство. Те просто поглъщаха идеите и неспирно си говорехме за тях. И тъй курсът ми се оказа успех и за уловените, и за ловеца.

Някъде през лятото на 1973 г. се опитах да нахвърля съдържание за „брошурата“ ми и тогава започнах да осъзнавам амбициозността на проекта, но все още я виждах повече като брошура, отколкото като книга. Едва през есента започнах да пиша сериозно. Дотогава не бях писал нищо по-дълго от няколко страници, но безстрашно се хвърлих напред, като си мислех, че ще ми отнеме не повече от няколко дни – най-много седмица-две. Всъщност малко не познах, понеже първата чернова (написана на ръка, както писмото ми до Робърт, но с повече зачерквания) ми отне около месец – месец, който се застъпи с Войната от Йом Кипур, която ми направи много силно впечатление. Разбрах, че първата чернова не е окончателният продукт, но смятах, че съм свършил основната работа и останалото е въпрос на редактиране.

Започват експерименти с литературната форма

Докато пишех черновата, определено не мислех за картини на Ешер. Нито пък за музика на Бах. Но един ден се почувствах пламнал с идеи за ума, мозъка и човешката личност, тъй че безсрамно заех от Луис Карол странната двойка Ахил и Костенурката, чиито забавни персонажи не спираха да ме радват, и седнах и с истинско настървение изписах дълъг, сложен диалог, в който ставаше дума за измислена, невъобразимо голяма книга, всяка страница от която съдържа изчерпателна информация за конкретен неврон от мозъка на Айнщайн. Освен това в диалога имахме една част, където двете действащи лица си представяха как се намират в друг диалог и казваха: „Тогава ще кажеш това ... на което аз сигурно ще отговоря така... и после ще продължиш...“, и тъй нататък. Заради тази необичайна структурна особеност, след като сложих точка на последната реплика, се върнах към първата страница и импулсивно написах най-отгоре „ФУГА“.

Разбира се, диалогът ми за книгата на Айнщайн не беше истина fuga – дори не се и доближаваше до това, – но все пак ми напомняше за fuga. Музиката на Бах винаги ме е вълнувала дълбоко, още от най-ранно детство, тъй че тази необикновена идея за съчетаване между „бахоподобни“ контрапунктови форми и живи диалози с богато интелектуално съдържание ме грабна и ме обсеби. През следващите няколко седмици, докато я обмислях от всички страни, осъзнах колко голямо пространство за действие има в тази насока и си представях колко ненаситно щях да поглъщам подобни диалози самият аз като тинейджър. Така стигнах до идеята от време на време да включвам в изложението контрапунктови диалози, отчасти за да разнообразя скуката от тежките идеи в главите на книгата, отчасти да мога да представя по-леки и по-алегорични варианти на всички тези трудноразбираеми понятия.

Казано накратко, в последна сметка реших – но това отне много месеци, – че оптималната структура ще бъде строго редуване на глави и диалози. Щом това се изясни, ми предстоеше приятната задача да опитам да уточня най-важните идеи, които искам да предам на читателите си, а след това по някакъв начин да ги въплътя и във формата, и в съдържанието на чудноватите,

често наситени с игри на думи диалози между Ахил и Костенурката (плюс някои нови приятели).

ГЕБ първо е охладена, после стоплена отново

В началото на 1974 г. смених научния ръководител на докторската си дисертация за четвърти и последен път, като се заех със съвършено непознат проблем от физиката на твърдото тяло, който излъчваше привлекателен аромат, макар да заплашваше да се окаже бодлив. Новият ми ръководител Грегъри Уониър искаше да се заема сериозно с работа, а и аз усещах, че това е последният ми шанс в света на физиката. Ако исках докторска степен – скъпоценна, но почти неуловима цел, за постигането на която се борех вече почти десет години, – моментът беше сега или никога. И тъй с голяма неохота прибрах любимия си ръкопис в едно чекмедже и си казах: „Не пипай! И да не поглеждаш!“ Дори си наложих наказания с лишаване от храна, ако даже отворя чекмеджето и прелистя незавършената книга. Всякакви ГЕБ-мисли – или поточно, ТНГИЧМ-мисли – бяха строго *verboten*.

Като споменах немски, беше планирано Уониър да посети Германия за шест месеца през есента на 1974 г. и понеже винаги съм обичал Европа, попитах дали не би било възможно и аз да дойда. Той беше така любезен да ми уреди да бъда *wissenschaftlicher Assistent* – на практика преподаващ асистент – по физика в университета в Регенсбург, тъй че точно това правех един семестър в края на 1974 и началото на 1975 г. По това време свърших по-голямата част от работата по докторската си дисертация. Понеже нямах близки приятели, дните и нощите ми в Регенсбург бяха дълги и самотни. В известен смисъл най-близкият ми приятел през този труден период беше Фредерик Шопен, понеже почти всяка вечер в полунощ включвах радио Варшава и слушах различни пианисти да изпълняват много негови произведения, които познавах и обичах, както и други, нови за мен, които заобичах.

Цялото това време беше забранено за ГЕБ; това продължи до края на 1975, когато приключих с дисертацията си. Въпреки че тя се занимаваше с една удивителна визуална структура (вижте глава 5 от тази книга) и беше добро начало за научна кариера, самолюбието ми беше получило твърде много удари по време на следването ми, за да вярвам, че от мен ще излезе добър физик. От

друга страна, повторното разпалване на старите интелектуални пламъци и особено писането на ТНГИЧМ отново ми бяха вдъхнали увереност.

Безработен, но силно мотивиран, се преместих в родния си Станфорд и там, благодарение на безрезервната и щедра финансова помощ на родителите ми („двугодишна Хофстатърова стипендия“, както на шега я наричах), се заех да се „преоборудвам“ като изследовател по изкуствен интелект. Но по-важно беше, че поднових страстната си любовна връзка с идеите, които така ме бяха пленили две години по-рано.

В Станфорд някогашната ми „брошура“ претърпя огромна промяна. Беше пренаписана от начало до край, понеже смятах, че макар и насочени към правилните идеи, първите ми чернови са незрели и стилово непоследователни. Също така разполагах с лукса на една от първите и най-добрите текстообработващи програми на света, изключително гъвкавата и удобна TV-Edit на новия ми приятел Пенти Канерва. Благодарение на нея новият вариант потече съвсем гладко. Не мога да си представя как бих написал ГЕБ без тази програма.

Едва на този етап наистина се изяви необичайното стилово своеобразие на книгата – понякога глупавите игри с думи, измислянето на нови словесни структури, които имитират музикални форми, невъздържаната употреба на какви ли не аналогии, изплитането на истории, чийто строеж илюстрира тематиката им, съчетаването на чудати персонажи във фантастични сценарии. Докато пишех, знаех със сигурност, че книгата ми изобщо няма да прилича на другите книги по подобни теми и че нарушавам доста конвенции. Въпреки това безгрижно продължавах, понеже бях убеден, че вършеното от мен просто трябва да бъде направено и че е правилно. Една от основните причини така да вярвам в създаването от мен беше, че това е книга, в която формата беше поставена на равна нога със съдържанието – и това не беше случайно, тъй като ГЕБ до голяма степен показва как съдържанието е неотделимо от формата, как семантиката е в хармония със синтаксиса, колко преплетени са структура и същност.

Макар винаги да съм знаел за себе си, че в много области от живота се интересувам от формата не по-малко, отколкото от съдържанието, не съм предполагал, че в първата си книга ще бъда завладян така дълбоко от въпроса за визуалния облик на всички

нива. Благодарение на лекотата на употреба на TV-Edit всичко, което пишех, се доизглаждаше, за да изглежда по-добре на екрана, и макар такъв контрол за автора някога да се е смятал за лукс, това много ми харесваше и не бих се отказал от него. Когато вече разполагах със стабилен вариант на ръкописа, готов за разпращане на издатели, визуалното оформление и идейната структура бяха тясно свързани помежду си.

Зовът на тръбата

Често са ме питали дали аз, неизвестен автор с нестандартен ръкопис и шантаво заглавие, е трябвало да се боря с години срещу страха на монолитната издателска индустрия от рискове. Е, може би просто съм имал късмет, но при мен всичко протече значително по-приятно.

В средата на 1977 г. разпратих на петнайсетина престижни издатели кратък примерен текст, колкото да се усети книгата, и повечето отговориха учтиво, че това не в тяхната област. Добре, съгласен. Но трима или четирима изразиха интерес да видят повече, така че един след друг им дадох да погледнат целия текст. Излишно е да обяснявам колко разочарован бях, когато първите двама го отхвърлиха (като и в двата случая разглеждането на ръкописа отне няколко месеца, тъй че загубата на време беше особено неприятна), но пък от друга страна, не бях твърде обезкуражен. И тогава към Коледа Мартин Кеслър, управителят на „Бейсик букс“, издателство, на което винаги съм се възхищавал, ми даде известни бъдещи надежда, но колебливи сигнали.

Зимата на 1977–1978 г. беше толкова студена, че Университетът на Индиана, където вече бях започнал да преподавам, свърши въглищата за отопление и през март беше принуден да затвори за три седмици в очакване на по-топло време. Реших да използвам свободното време, за да отида до Ню Йорк и по на юг и да видя стари приятели. В често мъглявата ми памет отчетливо се откроява краткото ми спиране в някаква съмнителна закусвалня в Кларингтон („тръба, тромпет“) в щата Пенсилвания, където от ледена телефонна кабина се обадох набързо в Ню Йорк на Мартин Кеслър, за да проверя дали е готов с присъдата. Беше велик момент в живота ми, когато той каза, че „с удоволствие“ ще работи с мен – почти ме спхождат мисли за свръхестест-

веното, като се сетя, че това повратно събитие се случи точно в градче с такова име.

Отмъщението на валците

След като бях намерил издател, възникна въпроса за превръщане на ръкописа от груба компютърна разпечатка в изискано набрана книга. Истински късмет беше, че за да подобри TV-Edit, Пенти тъкмо беше разработил една от първите компютърни системи за набор в света и ме насърчи да я използвам. Кеслър със своя авантюристичен дух също беше готов да я изпробва – отчасти, разбира се, защото това щеше да спести пари на „Бейсик букс“, но и защото по природа си падаше по риска.

Наборът „направи си сам“, макар и голям пробив за мен, съвсем не беше лесна работа. Компютърните технологии тогава бяха много по-примитивни от сега и за да ползвам системата на Пенти, във всяка глава или диалог трябваше да вмъквам буквално хиляди загадъчни форматиращи команди, след това да разделям всеки файл на няколко по-малки парчета, обикновено пет или шест, които трябваше да се прекарат през две програми, и накрая така получените файлове трябваше да се пробият физически във вид на неразбираема шарка от безброй дупки на дълга тънка хартиена лента. Трябваше сам да ходя на 200 метра до сградата, където беше перфораторът, да заредя лентата и да седя там и внимателно да го гледам да не блокира.

След това носех готовите мазни ленти на 500 метра в сградата, където се печаташе вестник „Станфорд дейли“, и там можех да използвам фотонаборния им автомат, ако беше свободен. Това беше дълга и сложна процедура, в която участваха касети с фоточувствителна хартия, тъмни стаички, бани с химикали и валци, през които минаваше хартията, за да се премахнат всички химикали от проявяването, а също и простори, на които се закачаха да съхнат за ден-два дългите метър и половина листове с текста ми. Така че процесът до момента, в който можех наистина да *видя* до какво са довели хилядите ми форматиращи команди, беше невероятно тромав и бавен. Но честно казано, няхах нищо против, всъщност го намирах за нещо като свещенодействие, специално и вълнуващо.

Но един ден, когато бяха отпечатани почти всички листове с текст – двеста или триста – и мислех, че вече мога да си вървя, направих ужасяващо откритие. Бях видял как излизат от проявителя с черен като въглен отпечатък, но текстът на някои от неотдавна отпечатаните листове изглеждаше кафеникав. Какво?! Когато проверих други, по-стари, видях светлокафяв текст, на още по-старите текстът беше към оранжево и дори бледожълто!

Не можех да повярвам. Как е възможно да се случи това? Простият отговор ме ядоса и ме накара да се чувствам безпомощен: старите валци се били износили неравномерно, тъй че не почиствали добре листовете, при което киселината разяждала черния текст ден след ден. За вестника това нямаше значение – те изхвърляха своите листове след няколко часа, – но за книга беше същинска катастрофа. Няма начин книга да бъде отпечатана от листове с жълт текст! А фотокопията, които бях направил веднага след проявяването, бяха качествени, но не достатъчно. Истински кошмар! С един замах беше унищожено неимоверно количество труд. Бях изпълнен с отчаянието на футболен отбор, видял как уж победният удар в празната врата на противника е избит от гол-линията от притичал защитник.

Бях прекарал почти цялото лято на 1978 г. в подготовка на листовете, но лятото вече завършваше, а аз трябваше да се връщам в Индиана да водя лекции. Какво да правя? Как да спася ГЕБ? Единственото решение, което виждах, беше на собствени разноски да летя до Станфорд всеки уикенд през есента и да повторя всичко от самото начало. За щастие преподавах само във вторник и четвъртък, така че всеки четвъртък следобед изхвърчах от залата, качвах се на самолета, пристигах в Станфорд, работех като луд до понеделник следобед и хуквах към летището, за да се върна в Индиана. Никога няма да забравя най-лошия от тези уикенди, когато някак успях да работя четирийсет часа без минутка сън. Ето на това му викам любов!

Все пак имаше и малко щастие в нещастieto: поправих всички грешки в първия набор. Първоначалният план беше да се използват коригиращи листове, които после да се нарежат на парченца в „Бейсик букс“ в Ню Йорк и да се залепят върху местата с грешки – а в първата група грешките се оказаха предостатъчно. Този подход несъмнено щеше да доведе до стотици грешки в оформлението. Но благодарение на невкарания гол, сега имам

възможността да премахна всички грешки и да произведе почти чисти листове. И тъй, въпреки че химическата катастрофа отложи отпечатването на ГЕБ с два месеца, впоследствие се оказа, че е била за добро.

Она...

Разбира се, имаше много идеи, които през тези години си съперничеха да влязат в оформящата се книга – някои успяха, други не. По ирония диалогът с Айнщайновата книга, чиято „фугалност“ вдъхнови всички следващи диалози, беше премахнат.

Имаше и един друг дълъг и сложен диалог, който беше премахнат или по-точно беше преобразен до пълна неузнаваемост, а любопитната му история е свързана с един бурен спор, който се вихреше в ума ми по онова време.

Благодарение на брошури, прочетени в студентския съюз в Орегон през 1970 г., имах ясна представа за проблема със сексисткия език и неговия коварен подсъзнателен ефект. Пред ума ми бяха разкрити труднодоловимите пътища, по които обобщаващите „той“ и „човек“* (и множество подобни думи и фрази) допринасят за оформянето на усещането ни какво е „нормално“ човешко същество и какво е „изключение“, и този нов поглед беше добре дошъл. По онова време обаче не бях писател, а студент по физика, и тези въпроси ми изглеждаха доста далеч от живота ми. Но когато започнах да пиша диалози, нещата се промениха. Настъпи момент, в който ми просветна, че действащите лица в диалозите ми – Ахил, Костенурката**, Рака, Мравояда и още някои с епизодични роли – са без изключение *от мъжки пол*. Бях потресен, че и аз съм станал жертва на подсъзнателния натиск срещу включването на персонажи от женски пол. И все пак, когато обмислях дали да не се върна и да не направя „операция по смяна на пола“ на един или повече персонажи, тази идея никак не ми се понрави. Но защо?

Единственият ми довод беше: „Ако бъдат включени жени, това ще вкара целия объркан свят на сексуалността в една на

* На английски man, което значи и „мъж“. – Б. пр.

** „The Tortoise“ – в английския език думите нямат род. – Б. пр.

практика напълно абстрактна дискусия, което ще отвлече вниманието от основните цели на книгата“. Този глупав мой възглед произтича от и отразява много мълчаливи допускания на западната цивилизация по онова време (както и днес). Докато се мъчех да се справя със собственото си грозно отношение, в ума ми се разгоря истинска битка, като една част от мен настояваше да се върна и да направя някои герои жени, а другата искаше да запази статуквото.

От тази вътрешна битка неочаквано се роди дълъг и забавен диалог, в който различните ми персонажи са се усетили, че всички са от мъжки пол, обсъждат защо е така и решават, че макар да имат усещане за свободна воля, всъщност трябва да са просто действащи лица в ума на някакъв автор сексист. По някакъв начин успяват да призват Автора в диалога си – и как отвърща той на обвинението в сексизъм? Обявява се за невинен и твърди, че не може да контролира онова, което неговият мозък прави – така че вина за сексизма му носи един сексистки Бог. В този момент в диалога се материализира Бог – и познайте какво? Оказва се, че е жена (хо-хо-хо). Не си спомням как продължаваше след това, но важното е, че бях дълбоко раздвоен и с всички сили се опитвах да се справя с тези сложни въпроси.

За мое съжаление – по-точно за съжаление на онзи аз от следващите години – в тази битка победи сексистката страна, като направи само някои отстъпки на другата страна (например кулата на джиновете в диалога „Малък хармоничен лабиринт“ и леля Хилари в „Прелюдия и мравешка fuga“). ГЕБ си остана книга с вътъкана дълбока сексистка предубеденост. Интересно, че много малко читатели, жени или мъже, коментираха тази предубеденост (което на свой ред подкрепя убеждението ми, че тези неща са много тънки и коварни и остават незабележими почти за всички).

Що се отнася до обобщаващите „той“ и „човек“, още по онова време не ми харесваше тяхната употреба, затова се опитвах да ги избягвам, където е възможно (или по-скоро, където беше лесно), но от друга страна не бях особено загрижен изцяло да прочистя текста си от тях, затова страниците на книгата тук-таме са зацапани от тази по-видима и по-явна форма на сексизъм. Сега потръпвам, когато в ГЕБ попадна на изречения, в които за читателите се говори като за „той“ или пък небрежно се споменава чо-

вечеството („mankind“), като че ли е някакъв огромен абстрактен мъж. Явно човек се учи, докато е жив.

И накрая, що се отнася до онзи самокритично-аналитичен диалог, където Ахил и компания призовават Автора и Бог, за да им бъде отправено обвинение в сексизъм, е, след много, много дребни промени той някак си се превърна в заключителния диалог на ГЕБ: „Шестгласен ричеркар“. Ако го четете, имайки предвид произхода му, може да откриете още интересни елементи.

Мистър Тортъс, запознайте се с мадам Тортю

Няколко години по-късно изникна съвсем неочакван шанс да поправа, поне отчасти, сексисткия си грях. Тази възможност ми беше предоставена от предизвикателството да се преведе ГЕБ на различни чужди езици.

Когато пишех книгата, въобще не ми беше хрумвала идеята, че тя някой ден може да бъде публикувана и на други езици. Не знам защо, след като обичам езиците и превода, но това изобщо не ми дойде на ум. Но щом издателят ми я подхвърли, идеята да видя книгата си на други езици много ме развълнува, особено на езици, които повече или по-малко знам – най-вече френски, понеже говоря езика свободно и много го обичам.

При евентуален превод можеха да изникнат милион проблеми, понеже книгата е пълна не само с очевидни игри на думи, но и със „структурни игри“, както ги нарече Скот Ким – откъси, където формата и съдържанието се отразяват помежду си и се подсилват взаимно по някакъв неочакван начин, а често това става заради щастливи съвпадения при някои английски думи. Заради тези сложни плетеници между съобщение и носител прилежно прегледах всяко изречение на ГЕБ и направих аотиран екземпляр за преводачите на произволен чужд език. Тази задача ми отне около година с прекъсванията, но накрая я завърших – и точно навреме, защото договорите с чужди издатели заваляха около 1982 г. Мога да напиша кратка книга – или брошура? – за необикновените, възхитителни, завързани загадки и дилеми, които възникваха при превода на ГЕБ, но ще спомена само една – как да се предаде на пръв поглед простият израз „мистър Тортъс“ (Mr. Tortoise) на френски?

Когато през пролетта на 1983 г. Жаклин Анри и Боб Френч, отличните преводачи на книгата на френски, се захванаха с диалозите, веднага се сблъскаха с конфликта между женския род на френското съществително *tortue* („костенурка“) и мъжкия характер на моя герой Костенурката (*Tortoise*). Между другото, със съжаление трябва да отбележа, че в чудния, но малко известен диалог на Луис Карол, откъдето съм заел тези възхитителни персонажи (препечатан в ГЕБ под името „Двугласна инвенция“), при по-внимателно вглеждане се оказва, че на Костенурката не е придаден никакъв пол. Но когато го прочетох за първи път, у мен дори не възникна такъв въпрос. Беше *очевидно*, че е мъжка костенурка. Все пак авторите вкарват герои от женски пол само поради някаква специална *причина*, нали? Докато герой от мъжки пол в „неутрален“ контекст (например философия) няма нужда от обосновка, това не важи за женския пол. И тъй, при липса на признаци за пола на Костенурката, аз безкритично и без особена мисъл си я представих като мъжка. Ето така сексизмът незабележимо се промъква в добронамерените, но податливи мозъци.

Но да не забравяме Жаклин и Боб! Въпреки че биха могли да решат проблема просто с груба сила, като измислят персонаж „мосю Тортю“ („г-н Костенурка“), усещали това решение като твърде неестествено звучащо на френски, тъй че в едно от многото писма помежду ни те доста предпазливо ме попитаха дали не бих си помислил да им разреша да сменят пола на Костенурката на женски. Разбира се, те сигурно не са си представяли, че авторът изобщо би удостоил с внимание подобно предложение, но всъщност още щом прочетох идеята, я възприех с огромен ентузиазъм. И така страниците на френската ГЕБ са украсени със свежата, фантастична фигура на мадам Тортю, която играе изненадващи интелектуални игри с другаря си Ахил, някогашен гръцки воин и философ любител.

В новия образ на Костенурката имаше нещо толкова приятно и удовлетворяващо за мен, че бях във възторг от него. Особено забавни ми бяха няколко разговора за Костенурката на два езика, когато започвах на английски с местоимението „той“, а после превключвах на френски с *elle* („тя“). И двете местоимения ми се струваха напълно естествени, дори имах чувството, че и на двата езика говоря за една и съща „личност“. По някакъв свой

необикновен начин това изглеждаше напълно в духа на половата неутралност на костенурката на Карол.

И тогава, за още по-голямо мое удоволствие, преводачите на италиански – друг език, на който се възхищавам и говоря доста добре – решиха да последват този пример и да превърнат моя „мистър Тортъс“ в „синьорина Тартаруга“. Разбира се, тези коренни промени по никакъв начин не се отразяват на възприятията на чисто английскоговорещите читатели на ГЕБ, но имам чувството, че по някакъв начин това помага поне малко да се компенсира печалния резултат от вътрешния ми сблъсък няколко години по-рано.

Дзен будизъм, Джон Кейдж и моята модна ирационалност

Френският превод като цяло беше посрещнат много благосклонно. Особено приятен момент за Боб, Жаклин и мен беше, когато на цяла страница в най-престижния френски вестник „Монд“ излезе истински възторжена рецензия от Жак Атали, която не само хвалеше книгата за идеите и стила ѝ, но и специално похвали превода.

Няколко месеца по-късно получих две рецензии, публикувани в последователни броеве на „Юманизм“, малкоизвестно списание на Обществото на френските франкмасони. И двете бяха дело на перото на един автор, Ален Улу, и ги зачетох с интерес. Първата беше доста дълга и, като онази в „Монд“, беше твърде положителна; аз се изпълних със задоволство и благодарност.

После минах към втората рецензия, която започваше с поетичната фраза „Après les roses, les épines...“ („След розите бодли...“) и в следващите няколко страници за мое удивление правеше ГЕБ на пух и прах като un piège très grave („много опасен капан“), който с готовност се хвърля към лишеното от мисъл увлечение по дзен будизма, където необузданата антинаучна, битническа и хипарска ирационалност, типична за американските физици, е представена като върховен път към просветление, а пък светец покровител на всичко това е радикалният, повлиян от дзен американски композитор Джон Кейдж.

Можех единствено да се изкикотя и да се хвана за главата в изумление от невероятните заключения на г-н Улу. По някакъв начин този критик е видял да възхвалявам Кейдж до небесата („Гъдел, Ешер, Кейдж“) и е успял да забележи в съдържаните ми алюзии и дребни заемки от дзен негово безкритично приемане, което няма нищо общо с позицията ми. Както обявявам в началото на глава 9, намирам дзен не само за объркващ и глупав, но и в пълно противоречие с убежденията ми. Но също така намирам безсмислието му – особено когато става *наистина* безсмислен – за доста забавно, дори освежаващо, и просто се радвах на възможността да поръся практически съвсем западното ми ястие с малко източни подправки. Но ако съм поставил парченца дзен тук и там, това не значи, че съм дзен монах в овча кожа.

Що се отнася до Джон Кейдж, по някаква странна причина допреди да прочета второто творение на Улу бях напълно убеден, че в „Канон с удължаване на интервалите“ и в главата след него недвусмислено съм подложил на присмех музиката на Кейдж, макар и уважително. Момент, момент – „да подложиш уважително на присмех“ не е ли оксиморон, та дори и напълно невъзможно? И не показва ли това прикрито флиртуване с противоречията и парадоксите, точно както твърди Улу, че в крайна сметка дълбоко в себе си аз *наистина* съм антинаучно и про-дзен настроен? Е, така да бъде.

Дори и да усещам, че книгата ми е разбрана погрешно толкова често, колкото и разбрана правилно, определено не мога да се оплача от ентузиазма на читателите ѝ по света. Оригиналното издание на ГЕБ на английски беше и продължава да е много популярно, а преводните ѝ превъплъщения влязоха в списъка на бестселърите във Франция, Холандия и Япония, а може би и другаде. Всъщност немската ГЕБ заемаше първото място в списъка за нехудожествена литература някъде около *пет месеца* през 1985 г., когато се навършиха 300 години от рождението на Й. С. Бах. Това ми се струва малко абсурдно. Но кой знае – може би тази годишнина съвместно с другите немскозвучащи имена на корицата е дала решителен тласък на популярността на ГЕБ там. ГЕБ също така беше преведена с любов на испански, италиански, унгарски, шведски и португалски, а също и – може би неочаквано – с голямо майсторство на китайски. Също така има готов чудесен превод на руски, който само чака да се намери издател.

Всичко това далеч надминава и най-смелите ми очаквания, въпреки че не мога да отрека, че докато я пишех, особено в онези шеметни дни в Станфорд, имах засилващо се усещане, че ГЕБ ще предизвика известни вълнения.

Моят последващ интелектуален път: първото десетилетие

Откакто изпратих ГЕБ в печатницата преди двацет години, не мога да се оплача от липса на работа. В допълнение към усилията ни с екип отлични студенти да разработим компютърни модели на мисловните механизми, на които се основават аналогията и творческите способности, също така написах още няколко книги, на които ще се спра съвсем накратко тук.

Първата от тях излезе в края на 1981 г. и се нарича „Вътрешното аз“, антология под съвместна редакция с новия ми приятел, философа Даниъл Денет. Целта ни беше близка до тази на ГЕБ – да принудим по най-яркия и дори разтърсващ начин читателите ни да се изправят срещу фундаменталната главоблъсканица на човешкото съществуване: нашето дълбоко и почти неунищожимо усещане, че притежаваме уникално „аз“, което не се ограничава от физическите ни тела и мистериозно ни позволява да упражняваме нещо, което наричаме „свободна воля“, без всъщност да знаем точно какво представлява то. Дан и аз използвахме разкази и диалози от разнородна група отлични писатели и едно от удоволствията за мен беше, че най-сетне все пак видях отпечатан диалога си с айнщайновата книга.

Между 1981 и 1983 г. имах възможността да пиша месечна колонка за сп. „Сайънтифик американ“, която нарекох „Метаматематически теми“ (Metamagical Themas) (анаграма на „Математически игри“ (Mathematical Games), името на великолепната колона на Мартин Гарднър, която заемаше това място в списанието предишните 25 години). Въпреки че темите, които засягах в рубриката си, на пръв поглед бяха разхвърляни безразборно, в известен смисъл те се обединяваха в неспирното търсене на „същността на ума и структурите“. Занимавах се с неща като структура и поетика в музиката на Шопен, въпроса дали генетичният код е случаен или неизбежен, стратегии във вечната битка срещу псевдонауката, границите между смисъл и безсмислица в лите-

ратурата, хаос и странни атрактори в математиката, теория на игрите и дилемата на затворника, творчески аналогии с прости числени закономерности, коварния ефект на сексисткия език и какво ли още не. Освен това понякога се спирах на странните цикли, самопозоваването и близкото до тях явление, което нарекох „захващане“. В този смисъл, както и заради допира им с толкова много дисциплини, есетата ми от „Метамагически теми“ притежават характера на ГЕБ.

Въпреки че престанах да водя колонката през 1983 г., прекарах следващата година в събиране на написаните есета и допълването им със значителен послепис; тези 25 глави и осем съвсем нови съставиха книгата ми „Метамагически теми: търсене на същността на ума и структурите“, излязла през 1985 г. Средновитите текстове беше един доста екстравагантен диалог между Ахил и Костенурката на име „Кой кого управлява в черепната кутия“, който според мен улавя възгледите ми върху личността, душата и онази неприлична думичка с „а“ – Аза – по-добре от всичко друго, което съм писал, може би дори по-добре и от ГЕБ, макар че тук може би стигам малко далеч.

В продължение на няколко години през 80-те бях поразен от остра форма на „амбиграмит“, с който ме зарази приятелят ми Скот Ким, и като краен резултат от това се получи книгата ми от 1987 г. „Амбиграми“. Амбиграмата (или „инверсия“, както я нарича Скот в своята книга) е калиграфска форма, която успява да вкара две различни значения в една съвкупност от криви. Идеята ми се видя очарователна и интелектуално завладяваща и докато развивах уменията си в тази странна, но елегантна художествена форма, открих, че самонаблюдаването ми дава много нови прозрения за природата на креативността, тъй че „Амбиграми“ съдържа не само близо 200 мои амбиграми, но и текст – всъщност диалог, – който е дълго, лъкатушно размишление върху творческия акт, съсредоточено най-вече върху амбиграмите, но с отклонения към композирането на музика, научните открития, писането и прочие. Няма смисъл да се задълбочавам в причините, но „Амбиграми“ беше издадена само на италиански от малко издателство на име „Хоупфул монстър“ и за съжаление тиражът вече е изчерпан.

Моят последващ интелектуален път: второто десетилетие

Както казах по-горе, писането, макар и с решаваща важност, не беше единствената ми интелектуална дейност; също толкова важни бяха изследванията на когнитивните механизми. Ранните ми предчувствия за моделирането на аналогията и креативността всъщност са изложени доста ясно в глава 19 на ГЕБ, където разглеждам задачите на Бонгард, и макар това да бяха само зародиши на истинска архитектура, спокойно мога да кажа, че независимо от многото години усъвършенстване, повечето от тези идеи може да се намерят под една или друга форма в моделите, разработени от изследователската ми група в Университета на Индиана и Университета на Мичиган (където между 1984 и 1988 г. работех в департамента по психология).

След 15 години разработване на компютърни модели като че ли беше назрял моментът за книга, която да събере основните теми в едно и да опише принципите и действието на програмите на ясен и достъпен език. Така в продължение на няколко години се оформяше „Изменчиви понятия и креативни аналогии“, докато накрая беше отпечатана през 1995 г. В нея са представени няколко свързани компютърни програми – Seek-Whence, Jumbo, Numbo, Soruscat, Tabletop и (текущо разработваните) Metacat и Letter Spirit – заедно с философски разисквания, които да им придадат необходимия контекст. Някои от главите са написани съвместно с членове на Изследователската група за изменчиви аналогии, затова групата е дадена като колективен съавтор. Книгата има много общо с ГЕБ, но може би най-важното е основното философско кредо, че да бъдеш „Аз“ – с други думи, да притежаваш така дълбоко и неунищожимо усещане за личност, че то да се прелива към причинност – е неизбежен съпътстващ ефект и съставна част от гъвкавостта и мощта, отъждествявани с *интелекта*, и че интелект е просто друго име за *понятийна гъвкавост*, което на свой ред означава *смислени символи*.

Съвсем различна линия в интелектуалния ми живот беше сериозното ми участие при превода на ГЕБ на различни езици, което ме доведе, може би от днешна гледна точка неизбежно, до превода на стихове. Всичко започна през 1987 г. с опита ми да предам на английски една прекрасна миниатюра от френския

поет от XVI в. Клеман Маро и от там се разпростря в най-различни посоки. Съвсем накратко, в последна сметка написах сложна и дълбоко лична книга за превода в най-общия и метафоричен смисъл и докато я пишех, усетих същата възбуда като двацет години по-рано, когато пишех ГЕБ.

Тази книга, „Le Ton beau de Marot“*, преминава през най-различни теми, включително и какво значи да „мислиш на“ някакъв език (или смес от езици), как ограниченията могат да стимулират творчеството, как смисълът се заражда, пониква и разцъфва в ума и същото може да стане някой ден в машините, как когато думите се съединят в словосъчетания, често се спояват и губят отчасти или изцяло самоличността си, доколко езикът, който се говори на неутронна звезда, може да има нещо общо с човешките езици, как трябва да се представя в днешно време поезия, написана преди стотици години, как преводът е дълбоко свързан с аналогията и с фундаменталната човешка дейност на разбиране на другите хора, кои откъси са поначало непреводими, ако въобще има такива, какво значи да се превеждат безсмислени пасажии от един език на друг, колко е абсурдно да се предполага, че днешните измишльотини за машинен превод, чиято основна цел е печалбата, могат да се справят и с най-простата поезия, и прочие, и прочие.

Две глави в средата на „Le Ton beau de Marot“ са посветени на едно художествено произведение, в което се влюбих неотдавна: романа в стихове на Пушкин „Евгений Онегин“. Тази книга ми попадна за първи път под формата на два превода на английски, след това прочетох други, като не преставах да се удивлявам на различната философия и стил на преводачите. Този начален пламък на въодушевлението ме накара да опитам да прочета текста в оригинал, а после, въпреки че руският ми беше много лош, не можах да се съържа и да не опитам да превода стих или два. Така се озовах на хлъзгав път, по който скоро се понесох неудържимо, като за огромна моя изненада накрая се оказа, че съм посветил цяла година на пресъздаване на целия роман – почти 400 искрящи сонета – в стихове на английски. Разбира се, през това време

* „Прекрасното звучене на Маро“, като „le ton beau“ звучи по същия начин както „le tombeau“ – „гробът“. – Б. пр.

руският ми се подобри неимоверно, макар че все още съм далеч от уменията да говоря свободно. Докато пиша това, моят „Онегин“ още не е отпечатан, но ще излезе приблизително по същото време през 1999 г. като и книгата, която държите – двайсетгодишното юбилейно издание на „Гьодел, Ешер, Бах“. А 1999 година играе също толкова важна роля в създаването на „Евгений Онегин“, понеже тогава се навършват 200 години от рождението на Александър Пушкин.

Гледащи напред и гледащи назад книги

„Le Ton beau de Marot“ е малко по-дълга от ГЕБ и на първата ѝ страница се осмелявам да я нарека „вероятно най-добрата книга, която ще напиша някога“. Някои от читателите ми ще бъдат на мнение, че ГЕБ стои по-високо, и разбирам защо смятат така. Но мина толкова време, откакто написах ГЕБ, че като че ли вълшебното усещане, което изпитвах при писането ѝ, вече е затихнало, докато магията на „Le Ton beau de Marot“ още е жива. Все пак не може да се отрече, че поне в краткосрочен план „Le Ton beau de Marot“ оказва значително по-малко въздействие от ГЕБ, и трябва да призная, че това доста ме разочарова.

Позволете ми да се опитам да предположа накратко защо е така. В известен смисъл ГЕБ е „гледаща напред“ книга, или поне на повърхността оставя такова впечатление. Мнозина я приветстваха като нещо като „библията на изкуствения интелект“, което, разбира се, е нелепо, но факт е, че много от младите ми студенти са я чели и са прихванали чувството на очарование от моделирането на ума във всичките му изплъзващи се аспекти, включително недоловимите цели на Аза, свободната воля и съзнанието. Въпреки че не бих могъл да бъда по-далеч от футуролог, маниак на тема научна фантастика или гуру на технологиите, често ми лепят точно такива етикети просто защото съм написал дълго произведение, което обръща сериозно внимание на компютрите и огромния им потенциал (във възможно най-философски смисъл), и защото книгата ми се радваше на голяма популярност сред младите хора, интересувани се от компютри.

Обратно на всичко това, „Le Ton beau de Marot“ може да се сметне за „гледаща назад“ книга, не толкова защото е вдъхновена от стихотворение от XVI век и се занимава и с други автори от

миналото като Данте и Пушкин, а просто защото на страниците на книгата няма нищо, което може да бъде объркано с повърхностен технологичен блясък и сюрреалистични футуристични обещания. Не че в ГЕБ има такива неща, но много хора като че ли намираха в нея нещо от този сорт, докато в „Le Ton beau de Marot“ няма нищо подобно, за което дори да се захване човек. Всъщност някои може да я възприемат почти като антитехнологична, понеже хокам много изследователи на изкуствения интелект и разработчици на системи за машинен превод за силно преувеличените им твърдения. Не съм враг на тези области, но съм против безразборното опростяване и недооценяване на предизвикателството, което представляват, понеже в крайна сметка това е равносилно на недооценяване на човешкия дух, към който изпитвам най-дълбоко уважение.

Всеки, който е прочел внимателно ГЕБ, сигурно е усетил как цялата книга е пропита от същия дух на „гледане назад“, като това може би най-ясно е изявено в ключовия фрагмент „Десет въпроса и спекулативни разсъждения“, който е един много романтичен поглед към дълбочината на човешкия дух. Въпреки че предвиждането ми за шахматните програми се оказа конфузно погрешно (както видя светът на мача между „Дийп блу“ и Гари Каспаров през 1997 г.), все пак тези няколко страници изразяват философски убеждения, към които продължавам да се придържам с пълна сила.

Да променя или да запазя оригиналния вид?

Като имаме предвид колко сериозно съм сбъркал в това предвиждане от преди двайсет години, защо да не пренапиша частта „Десет въпроса и спекулативни разсъждения“, като я обнова и разкажа какво мисля след „Дийп блу“? Разбира се, това поражда много по-сериозен въпрос: дали да не се преработи изцяло книгата от 1979 г. и да се направи превъзходно ново издание на ГЕБ от 1999 г. Какви са доводите за и против такъв проект?

Не отричам, че в преведените варианти бяха направени някои симпатични, макар и дребни, промени. Например моят приятел с невероятни знания за Бах Бърни Гринбърг ме осведоми, че „бокалът ВАСН“, който бях измислил от нищото за диалога „Контракростипункт“, в действителност съществува! Истински-

ят бокал не е (както в диалога) изработен от Бах, а е подарък от негов ученик; въпреки това, отличителната му черта – гравирана в стъклото мелодията „ВАСН“ – е точно както съм написал в диалога! Това беше такова изумително съвпадение, че за френския вариант пренаписах диалога, тъй че да отразява съществуването на *истинския* бокал, и настоях във френската ГЕБ да бъде включена снимка на бокала ВАСН.

Друг възхитителен щрих във френската ГЕБ беше заместването на твърде официалната, бездушна фотография на Гьодел със значително по-привлекателна снимка, на която той е издокаран с бял костюм и е застанал в гората с някакъв стар чешит. А той пък със своята омачкана шапка и торбести панталони, придържани от прости тиранти, изглежда като типичния селяндур, затова кръстих снимката „Kurt Gödel avec un paysan non identifié“ („Курт Гьодел с неизвестен селянин“). Но както моментално ще забележи всеки, който е живял през двайсети век, този *paysan non identifié* е не друг, а Алберт Айнщайн.

Тогава защо да не вкарам тези забавни промени в преработено английско издание? Ако минем към по-съществено ниво, защо да не разкажа малко за новаторската програма за изкуствен интелект Hearsay II, чиято изтънчена архитектура започна да оказва огромно влияние върху собствените ми компютърни модели само година-две след излизането на ГЕБ и за която знаех нещичко още през 1976 г.? Защо да не поговоря повече за машинния превод и особено за слабостите му? Защо да не вкарам цяла глава за най-обещаващите събития (и/или най-преувеличените твърдения) в изкуствения интелект през последните двайсет години – като разкажа и за своята изследователска група покрай всички останали? Или защо да не издам, както са ми предлагали, CD-ROM с картини на Ешер и музика на Бах, както и със запис на всички диалози от ГЕБ, изпълнени от първокласни актьори?

Е, виждам доводите в полза на всяко от тези предложения, но за съжаление просто не ги приемам. Предложението за CD-ROM, което ми се отправя най-често, е най-лесно за отхвърляне. Замислил съм ГЕБ като книга, не като мултимедиен цирк, и тя ще си остане книга – точка по въпроса. Но що се отнася до идеята за преработка на текста, това е по-сложно. Къде да се тегли чертата? Кое да бъде неприкосновено? Кое да оцелее, кое да бъде изхвърлено? Ако се захвана с това, със същия успех бих могъл да

пренапиша всяко изречение – а, и да не забравим да променим добрия стар мистър Тортъс.

Може би съм просто смахнат пурист, може би съм просто мързел най-чист, но съм инат без съмнение и не бих си и помислил да променя оригинала на книгата си. Край на всяко възражение! Така че в непреклонността си няма да си разреши да добавя към „Благодарности“ имената на Доналд Кенеди и Хауърд Еденбърг, въпреки че толкова години ми е тъжно, че без да искам, съм ги пропуснал. Дори няма да поправа печатните грешки в книгата (а за мое огорчение през годините намерих достатъчно освен изрично посочените в показалеца като „печатни грешки“)! Защо въобще се противя така на промените? Защо не осъвременя „Гюдел, Ешер, Бах“ и не я направя книга, достойна да отвори вратата пред двайсет и първи век – и дори пред третото хилядолетие?

Quærendo invenietis...

Е, единственият ми отговор, освен че животът е кратък, е, че ГЕБ беше написана на един дъх, така да се каже. ГЕБ беше чисто и ясно видение, появило се в мечтите на друг човек – човек, който несъмнено удивително прилича на вашия покорен слуга, но все пак имаше малко по-различен поглед към света и по-различни цели. ГЕБ беше делото на любовта на *онзи* човек и като такава – поне така казвам аз – не бива да се докосва.

И наистина, усещам някаква странна вътрешна увереност, че когато един прекрасен ден истинският автор на ГЕБ стигне *моята* зряла възраст, ще ми отправи най-искрени благодарности, че не съм се намесил с поправки на съдината, в която е излял толкова много от младата си и пламенна душа – работата, за която дори стигна до там, че да я нарече със според някои загадъчната или дори наивно романтична фраза „израз на моята вяра“. Поне аз знам какво е имал предвид.

REQUIESCAT IN CONSTANTIA, ERGO,
REPRÆSENTATIO CVPIDI AVCTORIS RELIGIONIS.

Кратък обзор

Част I: ГЕБ

Интродукция: музикално-логическо приношение. Книгата започва с историята на „Музикално приношение“ на Бах. Бах не-надейно посетил пруския крал Фридрих Велики и бил помолен да импровизира по тема, дадена от краля. Импровизациите му съставят основата на това велико произведение. „Музикално приношение“ и историята му образуват тема, върху която аз „импровизирам“ в книгата и по този начин създавам нещо като „Метамузикално приношение“. Обсъждат се самопозоваването и взаимовръзката между различните нива при Бах, това води до разглеждане на паралелни идеи в рисунките на Ешер и след това в Теоремата на Гьодел. Дава се кратко представяне на историята на логиката и парадоксите като контекст за Теоремата на Гьодел. Това води до въпроса за механизирването на мисленето и компютрите, както и до дебатите дали е възможен изкуствен интелект. Завършвам с обяснение за произхода на книгата и най-вече за развитието на диалозите.

Тригласна инвенция. Бах е написал 15 тригласни инвенции. В този диалог на три гласа Костенурката и Ахил – основните персонажи в диалозите – са „измислени“ от Зенон (както се е случило и в действителност, за да послужат за илюстрация на парадоксите на Зенон за движението). Съвсем кратък, диалогът е пример за атмосферата на следващите диалози.

Глава I: Загадката MIU. Представя се проста формална система (системата MIU) и читателят се приканва да реши една загадка, за да се запознае с формалните системи като цяло. Въвеждат се няколко фундаментални понятия: низ, теорема, аксиома, правило за извод, извеждане, формална система, разрешаваща процедура, работа във и извън системата.

Двугласна инвенция. Бах е написал и 15 двугласни инвенции. Автор на този диалог в два гласа не съм аз, а Луис Карол през 1895 г.

Карол заел Ахил и Костенурката от Зенон, а аз на свой ред ги заех от Карол. Темата на диалога е връзката между разсъжденията, разсъжденията за разсъжденията, разсъжденията за разсъжденията за разсъжденията и тъй нататък. Той напомня на парадоксите на Зенон за невъзможността на движението, като привидно показва чрез безкраен регрес, че разсъжденията са невъзможни. Прекрасен парадокс, за който се говори няколко пъти след това в книгата.

Глава II: Смисъл и форма в математиката. Представя се нова формална система (системата rq), дори по-проста от системата MPU от глава I. Привидно безсмислена отначало, изведнъж се разкрива, че символите ѝ притежават смисъл благодарение на формата на теоремите, в които се съдържат. Това разкритие е първото важно прозрение за природата на смисъла: дълбоката му връзка с изоморфизма. След това се разглеждат различни въпроси, имащи връзка със смисъла, като истината, доказателството, манипулацията на символи и изплъзващото се понятие „форма“.

Соната за соло Ахил. Диалог, който имитира сонатите на Бах за соло цигулка. В случая говори единствено Ахил, понеже това е запис на едната страна от телефонния му разговор с Костенурката. Разговорът им засяга понятията „фигура“ и „фон“ в различни контексти – например изкуството на Ешер. И самият диалог е пример за това разграничение, тъй като репликите на Ахил оформят „фигура“, а репликите на Костенурката – подразбиращи се от репликите на Ахил – „фон“.

Глава III: Фигура и фон. Разграничението между фигура и фон в изкуството се сравнява с разграничението между теорема и нетеорема във формалните системи. Въпросът „Фигурата непременно ли съдържа същата информация като фона си?“ води до разграничаването между рекурсивно номеруеми множества и рекурсивни множества.

Контракростиункт. Този диалог е основен за книгата, тъй като съдържа няколко парафрази на самопозоваващото се построение на Гьодел и на неговата Теорема за непълнота. Една от парафразите на Теоремата гласи: „За всеки грамофон съществува плоча, която той не може да възпроизведе“. Заглавието на диалога е комбинация от думите „акростих“ и „контрапункт“, латинска

дума, с която Бах обозначил фугите и каноните, съставляващи неговото „Изкуството на фугата“. Има и някои явни препратки към „Изкуството на фугата“. Самият диалог крие някои акростишни трикове.

Глава IV: Непротиворечивост, пълнота и геометрия. Анализира се предшестващият диалог, доколкото това е възможно на този етап. Това ни води обратно до въпроса как и кога символите в една формална система придобиват смисъл. Дадена е историята на евклидовата и неевклидовата геометрия като илюстрация за неясното понятие „неопределени термини“. Това води до идеи за непротиворечивостта на различни и евентуално „съперничаещи си“ геометрии. Постепенно понятието за неопределени термини се изяснява и се разглежда връзката им с възприятието и мисловните процеси.

Малък хармоничен лабиринт. Този диалог се основава на едноименното произведение за орган на Бах. Той е закачливо въведение към идеята за рекурсивни – т.е. вложени – структури. Съдържа истории в историите. Най-външната, рамковата история не завършва според очакванията, а остава отворена, тъй че читателят остава без разрешение. Една от вложените истории засяга модулацията в музиката – и по-конкретно, едно произведение за орган, което завършва в грешната тоналност и оставя слушателя без разрешение.

Глава V: Рекурсивни структури и процеси. Представя се идеята за рекурсията в най-различни контексти: музикални структури, езикови структури, геометрични структури, математически функции, физически теории, компютърни програми и други.

Канон с удължаване на интервалите. Ахил и Костенурката се опитват да разрешат въпроса „Кое съдържа повече информация, грамофонната плоча или грамофонът, който я възпроизвежда?“. Този странен въпрос възниква, когато Костенурката описва една плоча, която при изсвирване на различни грамофони възпроизвежда две съвсем различни мелодии: В-А-С-Н и С-А-Г-Е. Но се оказва, че мелодиите са „еднакви“ в един особен смисъл.

Глава VI: Мястото на смисъла. Широко обсъждане на разпределянето на смисъла между кодираното съобщение, декодера и полу-

чателя. Примерите включват молекули на ДНК, недешифрирани надписи на древни плочки и плочи, изпратени в космоса. Изказва се предположение за връзката между интелект и „абсолютен“ смисъл.

Хроматична фантазия и сблъсък. Кратък диалог, който освен в заглавието няма никаква прилика с „Хроматична фантазия и fuga“ на Бах. Засяга подходящия начин да се манипулират изреченията така, че да се запазва истината – и по-конкретно въпроса дали съществуват правила за употребата на думата „и“. Диалогът има много общо с диалога от Луис Карол.

Глава VII: Пропозиционално смятане. Дава се предложение как думи като „и“ могат да се управляват от формални правила. Още веднъж се разглеждат идеите за изоморфизма и автоматичното придобиване на смисъл от символите в такава система. Между другото, всички примери в тази глава са „изредzenia“ – изречения от дзен коани. Това е целенасочена закачка, понеже коаните са преднамерено нелогични истории.

Ракоходен канон. Диалог, основан на едноименно произведение от „Музикално приношение“. И двете се наричат така, понеже раците (уж) вървят назад. В този диалог за първи път се появява Рака. Може би това е най-наситеният диалог в книгата, що се отнася до номера с формата и игра между нивата. Гъдел, Ешер и Бах са дълбоко преплетени в този съвсем кратък диалог.

Глава VIII: Типографска теория на числата. Представя се разширение на пропозиционалното смятане, наречено ТТЧ. ТТЧ позволява извършване на разсъждения от теорията на числата посредством строги манипулации на символи. Разглеждат се разликите между формалните разсъждения и човешкото мислене.

Му приношение. Диалогът загатва за някои нови теми в книгата. Привидно занимаващ се с дзен будизъм и коани, той всъщност е не чак толкова прикрито обсъждане на теоремност и нетеоремност, истина и неистина на нивовете в теорията на числата. Има и някои препратки към молекулярната биология, по-точно към генетичния код. Няма особена връзка с „Музикално приношение“, освен заглавието и игрите на самопозоваване.

Глава IX: Мумон и Гьодел. Опит да се говори за странните идеи на дзен будизма. Централна фигура е дзен монахът Мумон, чиито коментари за много коани са широкоизвестни. В известен смисъл идеите на дзен имат метафорична прилика с някои съвременни идеи във философията на математиката. След това се представя фундаменталната идея на Гьодел за гьоделово номериране и се разглежда Теоремата на Гьодел за първи път.

Част II: ЕГБ

„Прелюдия...“... Този диалог е свързан със следващия. Те се основават на прелюдии и фуги от „Добре темперирано пиано“ на Бах. Ахил и Костенурката носят подарък на Рака, който има гост, Мравояда. Оказва се, че подаръкът е запис на „Добре темперирано пиано“, и той веднага се пуска на грамофона. Докато слушат прелюдия, обсъждат структурата на прелюдиите и фугите, което кара Ахил да запита как да слуша fuga: като цяло или като сума от части? Това е спорът между холизъм и редукионизъм, който скоро се задълбочава в „...и мравешка fuga“.

Глава X: Нива на описание и компютърни системи. Разглеждат се различни нива на възприемане на картини, шахматни позиции и компютърни системи. След това компютърните системи се анализират подробно. Това включва описание на машинния и асемблерния език, компилираните езици, операционни системи и тъй нататък. После обсъждането се насочва към други видове съставни системи, като спортни отбори, ядра, атоми, времето и прочие. Възниква въпросът колко междинни нива съществуват – и дали изобщо съществуват.

„...и мравешка fuga“. Имитация на музикална fuga: всеки глас встъпва с едно и също твърдение. Темата, холизъм срещу редукионизъм, е представена с рекурсивна рисунка, състояща се от думи, които се състоят от по-малки думи, и т.н. Думите на четирите нива на тази необикновена картина са „ХОЛИЗЪМ“, „РЕДУКЦИОНИЗЪМ“ и „МУ“. Разговорът се отклонява към една приятелка на Мравояда, леля Хилари, която е разумна колония мравки. Тема на дискусиата са различните нива на мисловния ѝ процес. В диалога се ползват множество фугови похвати. Като подсказка към читателя се споменават аналогични похвати, които се чуват във fugата, която четиримата участници слушат. На

края на „... и мравешка fuga“ се връщат теми от „Прелюдия...“, но сериозно трансформирани.

Глава XI: Мозък и мисли. Темата на главата е „Как мислите се поддържат от хардуера на мозъка?“. Първо се дава общ поглед към структурата на мозъка в макроскопичен и микроскопичен мащаб. След това се разисква по-подробно, макар и спекулативно, връзката между понятия и дейност на невроните.

Английско-френско-немска сюита. Интермецо, състоящо се от безсмисленото стихотворение на Луис Карол „Джаберуоки“ заедно с два негови превода, на френски и на немски, и двата направени през миналия век.

Глава XII: Разум и мисли. Предшестващите стихотворения повдигат с нова сила въпроса дали езиците, а и умовете, могат да бъдат „поставени в съответствие“ помежду си. Как е възможна комуникацията между два физически отделни мозъка? Какво е общото между мозъците на всички хора? С помощта на географска аналогия се дава предложение за отговор. Възниква въпросът: „Може ли мозъкът да бъде разбран в някакъв обективен смисъл от външен наблюдател?“.

Ария с различни вариации. Диалог, чиято форма се основава на „Голдберг вариации“ на Бах и чието съдържание е свързано със задачи от теорията на числата като хипотезата на Голдбах. Основна цел на този хибрид е да покаже как трудностите в теорията на числата произтичат от факта, че има много различни вариации по темата за търсене в безкрайно пространство. Някои от тях водят до крайни търсения, някои водят до безкрайни търсения, а някои остават по средата.

Глава XIII: BlooP, FlooP и GlooP. Това са имената на три компютърни езика. Програмите на BlooP могат да извършват само предвидимо крайни търсения, докато програмите на FlooP могат да изпълняват непредвидими или дори безкрайни търсения. Целта на главата е да осигури интуитивно схващане за понятията за примитивно рекурсивни и общо рекурсивни функции в теорията на числата, които са основни в доказателството на Гьодел.

Мелодия в G. Диалог, в който самопозоваващото се построение на Гьодел е пресъздадено в думи. Идеята дължи съществуването

си на У. Куайн. Този диалог служи като прототип за следващата глава.

Глава XIV: Относно формално неразрешимите твърдения в ТТЧ и сродни системи. Заглавието на главата е адаптация на заглавието на статията на Гьодел от 1931 г., в която за първи път е публикувана неговата Теорема за непълнота. Внимателно се разглеждат двете основни части от доказателството на Гьодел. Показва се как допускането за непротиворечивост на ТТЧ ни принуждава да заключим, че ТТЧ (и всяка подобна система) е непълна. Обсъждат се връзките с евклидовата и неевклидовата геометрия. С известна предпазливост се говори за следствията от това върху философията на математиката.

Рождена кантататата... В която Ахил не може да убеди хитрата и скептична Костенурка, че днес е неговият рожден ден. Повтарящите се, но неуспешни негови опити за това предвещават повторемостта на аргумента на Гьодел.

Глава XV: Да изскочиш от системата. Показана е повторемостта на аргумента на Гьодел, от което следва, че ТТЧ е не само непълна, но и „съществено непълна“. Анализира се достатъчно известният довод на Дж. Р. Лукас, който в резюме гласи, че Теоремата на Гьодел показва, че мисленето на хората не може да бъде „механично“ в никакъв смисъл, и бива намерен за необедителен.

Почителни мисли на един пушач на тютюн. Диалог, който засяга много теми, като главни са проблемите около самовъзпроизвеждането и самопозоваването. Сред използваните примери са телевизионни камери, които снимат телевизионни екрани, и вируси и други субклетъчни обекти, които се сглобяват сами. Заглавието е от стихотворение от самия Й. С. Бах, което се появява по неочакван начин.

Глава XVI: Самопозоваване и самовъзпроизвеждане. Тази глава разказва за връзката между самопозоваването в различните му образи и самовъзпроизвеждащите се обекти (напр. компютърни програми или молекули ДНК). Разглеждат се взаимоотношенията между самовъзпроизвеждащия се обект и външните спрямо него механизми, които му помагат да се възпроизведе (напр.

компютър или белтъци) – особено размития характер на разграничението. Централна тема на главата е как се движи информацията между различните нива в такива системи.

Магнификак, бре! Заглавието идва от „Магнификат в ре“ на Бах. Разказва се за Рака, който създава впечатлението, че притежава магическа способност да установява дали твърдения от теорията на числата са истинни или неистинни, като ги чете като музикални произведения, свири ги на флейтата си и решава дали са „красиви“ или не.

Глава XVII: Чърч, Тюринг, Тарски и други. Измисленият Рак от предишния диалог се замества от различни истински хора с изумителни математически способности. Тезисът на Чърч-Тюринг, който свързва умствената дейност и изчисленията, е представен в няколко варианта с различна сила. Всички се анализират, особено що се отнася до значението им за машинното симулиране на човешкото мислене или програмирането в машина на способност да усеща или създава красота. Връзката между мозъчната дейност и изчисленията отвежда към някои други теми, като стоп-проблема за машина на Тюринг и Теоремата за истината на Тарски.

SHRDLU нашата е гордост. Този диалог е взет от статия на Тери Уиноград за програмата му SHRDLU, променени са само някои имена. В него програма общува с човек за тъй наречения „блоков свят“ на доста впечатляващ английски. Компютърната програма като че ли проявява истинско разбиране – в собствения си ограничен свят. Заглавието на диалога идва от „Иисус моя ще е радост“, една част от кантата 147 на Бах.

Глава XVIII: Изкуствен интелект: ретроспекция. Главата започва с разглеждане на знаменития „тест на Тюринг“ – предложение от пионера на компютрите Алън Тюринг за начин да се определи наличието или липсата на „мисъл“ в машина. От там минаваме към кратка история на изкуствения интелект. Тя включва програми, които могат – до известна степен – да играят игри, да доказват теореми, да решават задачи, да композират музика, да правят математика и да използват „естествен език“ (напр. английски).

Контрафакт. За това как несъзнателно организираме мислите си, тъй че непрекъснато да можем да си представяме хипотетич-

ни варианти на реалния свят. Също за изкривявания в тази способност – като при новия персонаж, Ленивеца, страстен любител на пържени картофи и яростен противник на хипотетичните разсъждения.

Глава XIX: Изкуствен интелект: перспективи. Диалогът преди главата предизвиква обсъждане за това, как знанието се представя йерархично в нива от контексти. Това води до модерната в изкуствения интелект идея за „фреймове“. Като конкретен пример е даден фреймоподобен начин за обработка на загадки за визуални структури. След това се разглежда дълбокият въпрос за взаимодействието между понятията като цяло, което води до някои спекулации върху креативността. Главата завършва с няколко лични „въпроси и спекулативни разсъждения“ върху ИИ и разума като цяло.

Канон на Ленивеца. Канон, който имитира канон на Бах, където единият глас изпълнява същата мелодия като другия, само че обърнато наопаки и два пъти по-бавно, а третият глас е свободен. Тук Ленивеца казва същите реплики като Костенурката, само че подложени на отрицание (в най-широк смисъл) и два пъти по-бавно, а Ахил е свободен.

Глава XX: Странни цикли, или оплетени йерархии. Внутрителен завършек на много от идеите за йерархични системи и самопозоваване. Разглеждат се усложненията, които възникват, когато системите се обърнат към себе си – например науката, която изследва науката, правителството, което разследва нарушенията на правителството, изкуство, което престъпва правилата на изкуството, и накрая хора, които мислят за собствения си мозък и ум. Може ли Теоремата на Гьодел да каже нещо за последното „усложнение“? Свободната воля и усещането за разум имат ли връзка с Теоремата на Гьодел? Главата завършва, като свързва още веднъж Гьодел, Ешер и Бах.

Шестгласен ричеркар. Това е пълна с въодушевление игра с много от идеите на книгата. Пресъздава историята на „Музикално приношение“, с която книгата започна и същевременно е „превод“ в думи на най-сложното произведение в „Музикално приношение“, „Шестгласен ричеркар“. Тази двойственост придава на диалога повече нива на значение от всички други в книгата.

Фридрих Велики е заменен от Рака, пианата – от компютри, и т.н. Изникват много изненади. Диалогът засяга въпроси за разума, съзнанието, свободната воля, изкуствения интелект, теста на Тюринг и прочие, които са били представени по-рано. Завършва с неявно позоваване към началото на книгата, като по този начин превръща книгата в един голям самопозоваващ се цикъл, който символизира едновременно музиката на Бах, картините на Ешер и Теоремата на Гьодел.

Списък на илюстрациите

Корица: Увиснали в пространството трип-лети GEB и EGB, хвърлящи сянка върху три равнини, които се срещат в ъгъла на стаята. (Нарекох „трип-лет“ блокове, оформени така, че сенките им в три взаимно перпендикулярни направления са три различни букви. Идеята за трип-летите ме осени една вечер, докато се опитвах да измисля как най-добре да представя символично единството между Гьодел, Ешер и Бах, като по някакъв начин слея имената им в смайваща композиция. Двата трип-лета на корицата са измислени и изработени от мен основно с банциг и палцова фреза; направени са от червено дърво и са със страна около 10 см.)

Срещу благодарностите: началото на „Сътворение“ на древноеврейски.

Част I: Трип-летът GEB със своите три сенки.

1. Йохан Себастиан Бах от Елиас Готлиб Хаусман.
2. „Концерт за флейта в Сан Суси“ от Адолф фон Менцел.
3. Кралската тема.
4. Акrostихът на Бах върху RICERCAR.
5. „Водопад“ от М. Ешер.
6. „Качване и слизане“ от М. Ешер.
7. „Ръка с огледално кълбо“ от М. Ешер.
8. „Метаморфоза II“ от М. Ешер.
9. Курт Гьодел.
10. „Лист на Мьобиус I“ от М. Ешер.
11. „Дърво“ на всички теореми в системата MIU.
12. „Небесен замък“ от М. Ешер.
13. „Освобождение“ от М. Ешер.
14. „Мозайка II“ от М. Ешер.
15. „Рисунка“
16. Покриване на равнината с птици от М. Ешер.
17. „Фигура ФИГУРА-ФИГУРА“ от Скот Ким.

18. Диаграма на отношенията между различни класове от низове от ТТЧ.
19. Последната страница от „Изкуството на фугата“ на Бах.
20. Нагледно представяне на принципа в основата на Теоремата на Гьодел.
21. „Вавилонската кула“ от М. Ешер.
22. „Относителност“ от М. Ешер.
23. „Изпъкнало и вдлъбнато“ от М. Ешер.
24. „Влечуги“ от М. Ешер.
25. Лабиринтът в Крит.
26. Структура на диалога „Малък хармоничен лабиринт“.
27. Рекурсивни мрежи на преходите за УКРАСЕНО СЪЩЕСТВИТЕЛНО и ЛЮБОПИТНО СЪЩЕСТВИТЕЛНО.
28. РМП ЛЮБОПИТНО СЪЩЕСТВИТЕЛНО с рекурсивно разширен възел.
29. Неявно представяне на схема G и H.
30. Още по-разширена схема G.
31. РМП за числата на Фибоначи.
32. Графика на функцията $INT(x)$.
33. Скелетите на INT и $Gplot$.
34. $Gplot$ – рекурсивна графика.
35. Сложна диаграма на Файнман.
36. „Риби и люспи“ от М. Ешер.
37. „Пеперуди“ от М. Ешер.
38. Дърво на играта „морски шах“.
39. Розетският камък.
40. Колаж от писмености.
41. Последователността от бази на хромозомата на бактериофага $\phi X174$.
42. „Ракоходен канон“ от М. Ешер.
43. Малка част от един от Гените на Рака.
44. „Ракоходен канон“ от „Музикално приношение“ на Й. С. Бах.
45. „Джамията в Кордова“ от М. Ешер.
46. „Три свята“ от М. Ешер.
47. „Капка роса“ от М. Ешер.
48. „Друг свят“ от М. Ешер.
49. „Ден и нощ“ от М. Ешер.
50. „Кора“ от М. Ешер.
51. „Локва“ от М. Ешер.
52. „Навълна повърхност“ от М. Ешер.

53. „Три сфери II“ от М. Ешер.

Част II: Трип-летът EGB със своите три сенки.

54. „Лист на Мьобиус II“ от М. Ешер

55. Пиер дьо Ферма.

56. „Куб с магически ленти“ от М. Ешер.

57. Идеята за разделяне на блокове.

58. Асемблери, компилатори и нива на компютърните езици.

59. Интелектът, изграждан ниво по ниво.

60. „Картината МУ“.

61. „Мравешка fuga“ от М. Ешер.

62. „Преливане“ между две добре известни имена.

63. Снимка на мост от мравки (de Fourmi, Lierre).

64. „Витло“ холизъм-редукционизъм.

65. Схематична рисунка на неврон.

66. Човешкият мозък, поглед от страни.

67. Реакция на някои неврони спрямо определени структури.

68. Препокриващи се невронни пътища.

69. Изграждане на арка от работници термити.

70. Малка част от „семантичната мрежа“ на автора.

71. „Порядък и хаос“ от М. Ешер.

72. Структура на програма без обръщения на BlooP.

73. Георг Кантор.

74. „Горе и долу“ от М. Ешер.

75. Множество разклонения на ГТЧ.

76. „Дракон“ от М. Ешер.

77. „Сенките“ от Ръоне Магрит.

78. „Благодат“ от Ръоне Магрит.

79. Вирус на тютюневата мозайка.

80. „Уловената красота“ от Ръоне Магрит.

81. Самопоглъщащи се телевизионни екрани.

82. „Мелодия и песен“ от Ръоне Магрит.

83. Епименид изпълнява собствената си смъртна присъда.

84. Айсбергът на парадокса на Епименид.

85. Сапунът на изречението на Куайн.

86. Самовъзпроизвеждаща се песен.

87. Типогенетичният код.

88. Третична структура на типoenзим.

89. Таблица на предпочитанията за свързване на типoenзимите.

90. Централната догма на типогенетиката.

91. Четирите бази на ДНК.
92. Подобната на стълба структура на ДНК.
93. Молекулен модел на двойната спирала на ДНК.
94. Генетичният код.
95. Вторична и третична структура на миоглобина.
96. Участък от мРНК минава през рибозома.
97. Полирибозома.
98. Молекулярен канон от две нива.
99. Централният догмобраз.
100. Гъделовият код.
101. Бактериофагът Т4.
102. Инфектиране на бактерия с вирус.
103. Морфогенетичният път на вируса Т4.
104. „Кастровалва“ от М. Ешер.
105. Сриниваса Рамануджан и една от необикновените му индийски мелодии.
106. Изоморфизми, свързващи естествените числа, калкулаторите и човешкия мозък.
107. Невронна и символна дейност в мозъка.
108. „Отделяне“ на най-горното ниво на мозъка.
109. Конфликтът между ниските и високите нива в мозъка.
110. Сцената в началото на диалога с SHRDLU.
111. Сцената по-късно в диалога с SHRDLU.
112. Последна сцена от диалога с SHRDLU.
113. Алън Тюринг.
114. Доказателството на *pons asinorum*.
115. Безкрайното дърво на целите на Зенон.
116. Смислена история на арабски.
117. „Мисловна аритметика“ от Ръоне Магрит.
118. Процедурно представяне на „червен куб, който поддържа пирамида“.
119. Задача на Бонгард № 51.
120. Задача на Бонгард № 47.
121. Задача на Бонгард № 91.
122. Задача на Бонгард № 49.
123. Малка част от понятийната мрежа за задачи на Бонгард.
124. Задача на Бонгард № 33.
125. Задачи на Бонгард № 85 – № 87.
126. Задача на Бонгард № 55.
127. Задача на Бонгард № 22.
128. Задача на Бонгард № 58.

129. Задача на Бонгард № 61.
130. Задача на Бонгард № 70, № 71.
131. Схема на диалога „Ракоходен канон“.
132. Две хомоложни хромозоми, съединени в средата с центромера.
133. „Канон на ленивеца“ от „Музикално приношение“ на Й. С. Бах.
134. Авторски триъгълник.
135. „Рисуващи ръце“ от М. Ешер.
136. Абстрактна схема на „Рисуващи ръце“ на М. Ешер.
137. „Здрав разум“ от Ръоне Магрит.
138. „Двете мистерии“ от Ръоне Магрит.
139. „Димен сигнал“ от автора.
140. „Празна мечта“ от автора.
141. „Човешката ситуация I“ от Ръоне Магрит.
142. „Галерия с гравюри“ от М. Ешер.
143. Абстрактна схема на „Галерия с гравюри“ на М. Ешер.
144. Свит вариант на предишната фигура.
145. Още по-голямо свиване на фиг. 143.
146. Друг начин за свиване на фиг. 143.
147. Безкрайно извисяващият се канон на Бах образува странен цикъл, когато се изпълнява с тонове на Шепард.
148. Два пълни цикъла на гама от тонове на Шепард, записана за пиано.
149. Verbum от М. Ешер.
150. Чарлс Бабидж.
151. Темата на Рака.
152. Последната страница на „Шестгласен ричеркар“ от оригиналното издание на „Музикално приношение“ от Й. С. Бах.

: 9 5 x 7 x : 5 7 x 2 x : x 9 9 : x 7 5 x 9 9
 : 5 7 x 2 x 9 5 7 7 x : 9 x x : 7 x 7 : 5 7 x 2 x
 : x x 7 7 : 5 7 x 2 x : 9 5 x 7 x : 7 7 7 9 7 7 x
 : x 5 9 x : 5 7 x 2 x : 9 5 x 7 x : 5 7 5 x

Благодарности

Тази книга съзрява в ума ми сигурно от близо двацет години – още откакто бях на тринайсет и си мислех как мисля на английски и на френски. И дори преди това се забелязваха ясни признаци за основния ми интерес. Спомням си как в една съвсем ранна възраст най-забележителното нещо за мен беше идеята да взема три тройки: да действам върху 3 със *самото него!* Бях сигурен, че тази идея е толкова изтънчена, че никой друг не би могъл и да си я представи, но все пак един ден се осмелих да попитам майка ми колко е голямо това и тя отговори „девет“. Но не бях убеден, че беше разбрала какво имам предвид. По-късно баща ми ме посвети в тайните на квадратния корен и *i...*

На родителите си дължа най-много от всички. Те ми бяха опорен стълб, на който можех да разчитам по всяко време. Те ме напътстваха, вдъхновяваха, насърчаваха и поддържаха. И най-вече винаги са вярвали в мен. Тази книга е посветена на тях.

Дължа специални благодарности на двама дългогодишни приятели, Робърт Боунингър и Питър Джоунс, за тяхната помощ в оформянето на милиони начини на мислене и за тяхното влияние и идеи, разпръснати навсякъде из книгата.

Много съм задължен на Чарлс Бренър, заедно ме научи да програмирам, когато и двамата бяхме млади, както и за постоянното му бутане и ръчкане – скрита похвала, – и понякога критики.

С радост отбелязвам огромното влияние на Ърнест Нейджъл, стар приятел и наставник. Много обичах „Нейджъл и Нюман“ и научих много от многобройните ни разговори преди доста време във Вермонт и не толкова отдавна в Ню Йорк.

Чрез книгата си Хауърд Делонг събуди отново у мен заспалата отдавна любов към въпросите в тази книга. Наистина съм му много задължен!

Дейвид Джонатан Джъстман ме научи какво е да си Костенурка – находчиво, упорито и весело създание, обичащо парадокс-

сите и противоречията. Надявам се, че ще прочете и ще хареса тази книга, която дължи много на него.

Скот Ким оказа гигантско влияние върху мен. Още когато се запознахме преди две и половина години, между нас възникна невероятен резонанс. Скот има не само значителен принос с картини, музика, хумор, аналогии и тъй нататък, включително и труд в критични моменти, за който съм му много благодарен, но и на него дължа нови гледни точки и прозрения, които промениха възгледите ми върху този проект в процеса на неговото развитие. Ако някой разбира тази книга, това е Скот.

За съвет за важни или дребни неща редовно се обръщам към Дон Бърд, който познава книгата като петте си пръста... Той има непогрешимо усещане за цялостната ѝ структура и цели и неведнъж ми е давал добри идеи, които с удоволствие използвах. Съжалявам единствено, че няма да мога да включа всички *бъдещи* идеи, които ще хрумнат на Дон, след като книгата се даде за печат. И да не забравя да благодаря на Дон за прекрасната гъвкавост в негъвкавостта на програмата му за печатане на музика SMUT. Той прекара много дълги дни и тежки нощи, убеждавайки SMUT да върши абсурдни номера. Някои от резултатите са включени като фигури в тази книга. Но влиянието на Дон е разпръснато из целия текст за мое огромно задоволство.

Не бих могъл да напиша тази книга без подкрепата от страна на Института за математически изследвания в обществените науки към университета „Станфорд“. Неговият директор Пат Съпс е стар мой приятел и беше изключително щедър към мен, като ме подслони във „Вентура хол“, осигури ми достъп до превъзходна компютърна система и като цяло отлична работна среда в продължение на повече от две години.

Така стигам до Пенти Канерва, авторът на текстообработващата програма, на която тази книга дължи съществуването си. Казвал съм на мнозина, че щеше да ми отнеме два пъти повече време да напиша книгата, ако не можех да ползвам TV-Edit, елегантната програма, така семпла по дух, че само Пенти би могъл да я напише. Също така благодарение на Пенти можах да направя нещо, което са правили само малцина автори: сам да подготвя за печат книгата си. Той беше основен двигател в развитието на компютърния набор в Института за математически изследвания. Но също толкова важно за мен беше едно рядко качество, което

Пенти притежава: чувството за стил. Ако книгата ми *изглежда* добре, това се дължи до голяма степен на Пенти Канерва.

Самата книга се роди в наборния отдел на Студентската асоциация на „Станфорд“. Бих искал да изкажа сърдечни благодарности на директора му Бевърли Хендрик и на екипа ѝ за помощта им в тежките моменти и за неизменно високия им дух пред лицето на неудачите. Също така искам да благодаря на Сесил Тейлър и Барбара Ладага, които свършиха повечето работа при изработването на шпалтите на книгата.

През годините сестра ми Лора Хофстатър е повлияла много върху погледа ми към света. И формата, и съдържанието на книгата носят нещо от нейното влияние.

Бих искал да благодаря на новите и старите си приятели Мари Антъни, Сидни Аркоуиц, Бенгт Оле Бенгтсон, Феликс Блох, Франсиско Кларо, Пърси Диаконис, Наи-Хуа Дуан, Джон Елис, Робин Фрийман, Дан Фридман, Пранаб Гош, Майкъл Голдхейбър, Аврил Гринбърг, Ерик Хамбърг, Робърт Хърман, Рей Хайман, Дейв Дженингс, Даян Канерва, Лори Канерва, Инга Карлинер, Джонатан и Елън Кинг, Гейл Лант, Бил Луис, Джос Марлоу, Джон Макарти, Джим Макдоналд, Луи Менделоуиц, Майк Мюлър, Розмари Нелсън, Стив Омохундро, Пол Опенхаймър, Питър Паркс, Дейвид Поликански, Пит Римби, Кати Росър, Вилфрид Зиг, Гай Стийл, Лари Теслър, Франсоа Ванучи, Фил Уодлър, Тери Уиноград и Боб Уолф, задето „резонираха“ с мен в критични моменти от живота ми и по този начин допринесоха по най-различни начини за тази книга.

Написах тази книга два пъти. След като я написах първия път, започнах отначало и я пренаписах. Първият опит беше, когато още бях студент по физика в Университета на Орегон, където четирима преподаватели гледаха много снизходително на необичайното ми поведение: Пол Цонка, Руди Хуа, Майк Моравчик и Грегъри Уониър. Благодаря много за разбирането. Освен това Пол Цонка прочете един цял ранен вариант и отпрати полезни забележки.

Благодаря на Едуард Уилсън за прочита и забележките към една ранна версия на „Прелюдия и нравешка fuga“.

Благодаря на Марша Мередит, че беше метаавтор на един забавен коан.

Благодаря на Марвин Мински за незабравимия разговор през един мартенски ден в дома му, части от който читателят ще прочете предадени тук.

Благодаря на Бил Кауфман за съветите по издаването и на Джереми Бърнстайн и Алекс Джордж за окуражителните думи в нужда.

Сърдечни благодарности на Мартин Кеслър, Морийн Бишоф, Винсънт Торе, Лион Дорин и всички останали от „Бейсик букс“ за това, че приеха този необикновен в толкова много отношения проект.

Благодаря на Фиби Хос за чудесно свършената тъй сложна редакторска работа и на Лари Брид за ценния труд по коригирането на текста.

Благодаря на многото обитатели на залата с „Имлак“, които приеха безчет съобщения по телефона през годините, също така на екипа от „Пайн хол“, който разработи и поддържаше голяма част от хардуера и софтуера, толкова важни за тази книга.

Благодаря на Денис Дейвис от Учебната телевизия на „Станфорд“ за помощта му при нагласянето на „самопоглъщащите се телевизори“, които фотографирах в продължение на часове.

Благодаря на Джери Прайк, Боб Паркс, Тед Брадшоу и Вини Ейвъни от работилницата към Лабораторията по физика на високите енергии в „Станфорд“, че с готовност ми помогнаха да изработя трип-летите.

Благодаря на чичо ми и леля ми, Джими и Бети Гайван, за коледния подарък, който не са предполагали, че ще ми достави такова удоволствие: „черна кутия“ с една-единствена функция, да изключва себе си.

Накрая бих искал да отправя специални благодарности на Брент Харолд, преподавателя ми по английски в първи курс в колежа, който пръв ме запозна с дзен, на Кеес Гугелот, който ми даде запис с „Музикално приношение“ един тъжен ноември много отдавна, и на Ото Фриш, в чийто кабинет в Кеймбридж за първи път видях магията на Ешер.

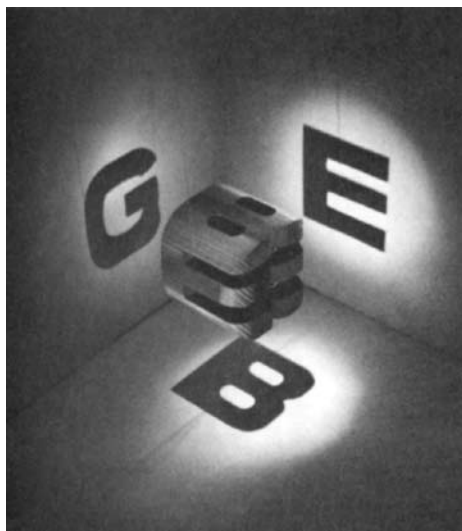
Опитах се да си спомня всички, които са допринесли за създаването на книгата, но със сигурност съм пропуснал някого.

В известен смисъл тази книга е израз на моята вяра. Надявам се, че читателите ми ще усетят това и че ще се намерят хора, чиито сърца ще възприемат моя възторг и благоговение пред някои идеи. Не бих могъл да искам повече.

*Д. Р. Х.
Блумингтън и Станфорд
Януари 1979 г.*

Часть I

ГЕБ





Фиг. 1.

Йохан Себастиан Бах, 1748 г. От картина на Елиас Готлиб Хаусман

Интродукция:

Музикално-логическо приношение

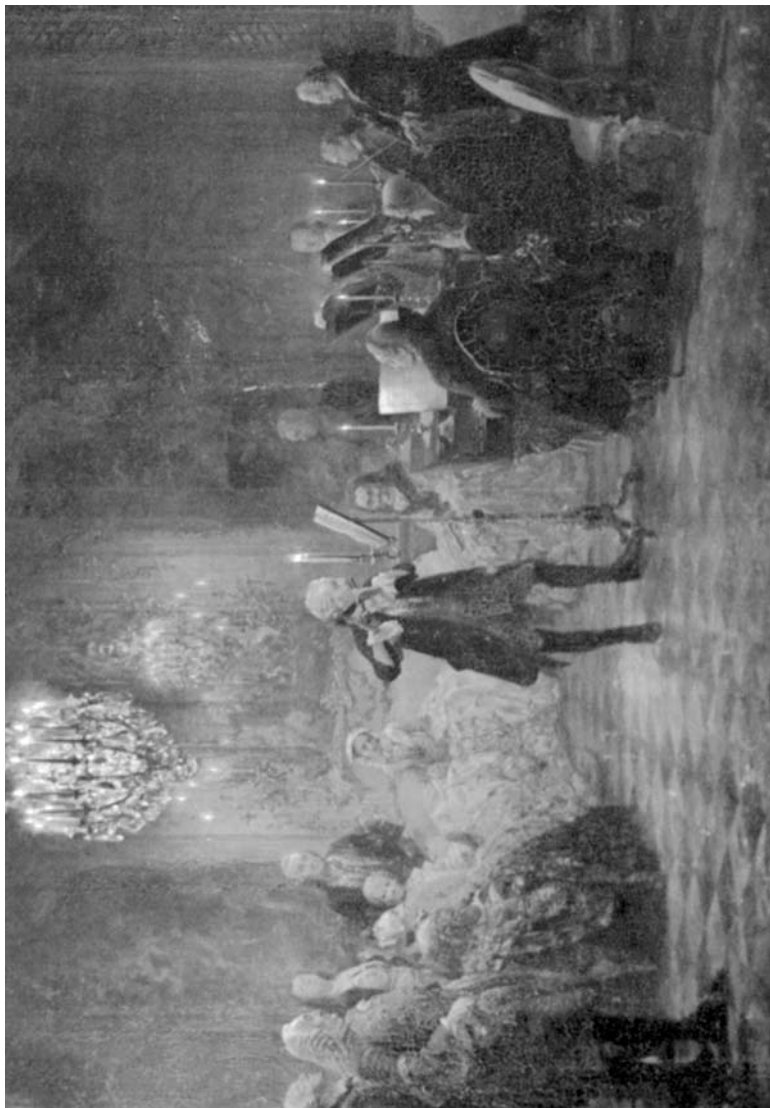
Авторът:

Фридрих Велики, крал на Прусия, идва на власт през 1740 г. Въпреки че в учебниците по история е останал най-вече със своите военни умения, той също така се бил посветил на духовния и интелектуален живот. Неговият двор в Потсдам е един от големите културни центрове в Европа през XVIII в. Знаменитият математик Леонард Ойлер прекарва там 25 години. Гостуват му много други математици, учени и философи, включително Волтер и Ламетри, които пишат някои от най-влиятелните си произведения по време на престоя си там.

Но истинската любов на Фридрих е музиката. Той е страстен флейтист и композитор. Негови творби се изпълняват понякога и днес. Фридрих е един от първите покровители на изкуствата, който осъзнава качествата на новото „пиано-форте“ („тихо-силно“). Пианото се появява през първата половина на XVIII в. като развитие на клавесина. Проблемът при клавесина е, че произведенията може да се свирят единствено с равномерна сила – няма начин даден тон да бъде изпълнен по-силно от съседните. Новото „тихо-силно“, както показва името, разрешава този проблем. От Италия, където Бартоломео Кристофори изработва първото пиано, идеята за „тихо-силно“ се разпространява из Европа. Готфрид Зилберман, най-изтъкнатият немски майстор на органи по онова време, се стреми да направи „съвършено“ пиано-форте. Без съмнение крал Фридрих е най-големият поддръжник на неговите усилия – казват, че кралят притежавал цели петнайсет пиана на Зилберман!

Бах

Фридрих е почитател не само на пианата, но и на един органист и композитор на име Йохан Себастиан Бах. Произведенията на този Бах се ползвали с известна слава. Някои ги наричали „помпозни и объркани“, други ги обявявали за ненадминати шедеври. Но никой не подлагал на съмнение способността на Бах



Фиг. 2. „Концерт за флейта в Сан Сусепи“, Адолф фон Менцел (1852)

да импровизира на орган. По онова време да бъдеш органист означавало не само да можеш да свириш, но и да можеш да импровизираш, а Бах бил известен надлъж и нашир със своите забележителни импровизации. (За различни любопитни случки около импровизациите на Бах вижте „Христоматия за Бах“ от Х. Т. Дейвид и А. Мендел.)

През 1747 г. Бах е на шейсет и две години и славата му е достигнала Потсдам, както и един от синовете му; всъщност Карл Филип Емануел Бах е капелмайстор в двора на крал Фридрих. В продължение на години кралят дава да се разбере чрез намеци към Филип Емануел, че ще се радва, ако старият Бах го посети, но това не се случва. Фридрих особено силно желае Бах да изпробва новите пиана на Зилберман, за които правилно предвижда, че ще станат голямата нова вълна в музиката.

В двора си Фридрих има навика да устройва вечерни концерти на камерна музика. Често той самият е солист в концерт за флейта. Тук даваме репродукция на картина на подобна вечер от немския художник Адолф фон Менцел, който през XIX в. рисува серия картини, илюстриращи живота на Фридрих Велики. На чембалото е К. Ф. Е. Бах, а човекът най-отдясно е Йоахим Куанц, учителят по флейта на краля – и единственият, на когото е позволено да критикува свиренето му. Една майска вечер през 1747 г. пристига неочакван гост. Йохан Николаус Форкел, един от първите биографи на Бах, разказва историята ето така:

Една вечер, когато тъкмо нагласял флейтата си и музикантите му се били вече събрали, един подофицер му донесъл списък на пристигнали чужденци. С флейтата в ръка той хвърлил поглед на хартийката, но веднага се обърнал към събраните оркестранти и казал с леко възмущение: „Господа, дошъл е старият Бах!“ След това флейтата била сложена настрана и старият Бах, който бил отседнал в жилището на сина си, бил веднага повикан в двореца. Тази история ми е разказана от Вилхелм Фридеман, който придружавал баща си, и аз трябва да кажа, че и днес с удоволствие си спомням как ми я разказваше. По онова време още се правели многословни комплименти. Първото появяване на Йохан Себастиан Бах пред такъв велик крал, който не му оставил време дори да смени пътните си дрехи с черния канторски жакет, неизбежно е било придружено от множество извинения. Тук няма да привеждам

тези извинения, а само ще отбележа, че в устата на Вилхелм Фридеман те бяха същински диалог между краля и извиняващия се.

Но по-важно от всичко това е, че тази вечер кралят се отказал от своя концерт за флейта и накарал вече така наричания стар Бах да изпробва неговите пръснати в много стаи на двореца Зилберманови пиана. [Тук Форкел слага бележка под линия: „Направените от Зилберман от Фрайберг пианофорте се понравили на краля толкова много, че той твърдо решил да изкупи всичките. Събрал петнайсет. Доколкото ми е известно, сега всички стоят, негодни за употреба, из разни ъгли на кралския дворец“.] Оркестрантите ги придружавали от стая в стая и Бах трябвало да изпробва и да импровизира във всяка. След като изпробвал и импровизирал известно време, той помолил краля да му зададе тема за фуга, за да я разработи веднага, без никаква подготовка. Кралят бил поразен от учения маниер, с който темата му била разработена набързо, и вероятно, за да види докъде може да бъде доведено подобно изкуство, изразил сега желание да чуе фуга с шест облигатни гласа. Но тъй като не всяка тема е подходяща за такъв брой гласове, Бах сам си избрал една за тази цел и за най-голямо учудване на всички присъстващи я разработил със също тъй блестящ и учен маниер, както преди това темата на краля. Кралят пожелал да се запознае и с органното му изкуство. Затова през следващите дни той му показал и всички намиращи се в Потсдам органи така, както му бил показал преди всички Зилберманови пиана. След завръщането си в Лайпциг Бах разработил зададената от краля тема за три и шест гласа, добавил различни изкусни канони, дал да гравират всичко под заглавие *Musikalisches Opfer* [„Музикално приношение“] и го посветил на изобретателя на темата.^{1*}

* Превод Георги Георгиев, в „Йохан Себастиан Бах“, Алберт Швайцер, изд. „Музика“, С., 1981 г. – Б. пр.



Фиг. 3. Кралската тема

Когато Бах изпраща копие от „Музикално приношение“ на краля, прилага писмо с посвещение, което представлява интерес за нас ако не за друго, то заради стила си – доста покорен и ласкателен. От съвременна гледна точка писмото звучи комично. Освен това вероятно донякъде пресъздава духа на извинението на Бах по повод външния му вид.²

ВСЕМИЛОСТИВИ КРАЛЮ!

С настоящото посвещавам на Ваше Величество с най-дълбоко смирение едно музикално приношение, чиято най-благородна част произлиза от августейшата ръка на Ваше Величество. С благоговеещо удоволствие си спомням тъй изключителната кралска милост, когато неотдавна, по време на моето посещение в Потсдам, Ваше Величество лично благоволи да ми изсвири тема за fuga на клавир и едновременно благосклонно ме натовари да я изпълня в августейшото присъствие на Ваше Величество. Мой дълг беше смирено да се подчиня на желанието на Ваше Величество. Но съвсем скоро забелязах, че заради липсата на необходимата подготовка изпълнението на задачата не вървеше толкова добре, колкото изисква подобна превъзходна тема. Поради това взех твърдото решение и незабавно се зарекох да разработя тази тъй подходяща кралска тема по-пълно и впоследствие да я оповестя пред света. Това решение вече е изпълнено, доколкото позволяват моите възможности, и няма друго освен почтеното намерение да възхваля, пък дори и с малко, името на монарх, чието величие и сила не само във всички науки на войната и мира, но и особено в музиката, трябва да бъдат почитани и уважа-

вани от всички. Осмелявам се да прибавя тази смирена молба: нека Ваше Величество благоволи да удостои представения скромнен труд с благосклонен прием и да продължи да оказва августейшата кралска милост на Ваше Величество на

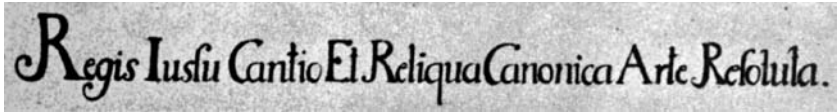
*Покорния и послушен слуга на
Ваше Величество,
Автора
Лайпциг, 7 юли
1747 г.*

27 години по-късно, когато Бах вече бил мъртъв от 24 години, един барон на име Готфрид ван Свитен – на когото, между другото, Форкел посвещава биографията си на Бах, а Бетховен посвещава своята Първа симфония – разговаря с крал Фридрих, за което разказва следното:

Той [Фридрих] говори с мен за най-различни неща, включително за музика и за един велик органист на име Бах, който от известно време бил в Берлин. Този музикант [Вилхелм Фридеман Бах] е надарен с талант, който превъзхожда в дълбочината на познанието за хармония и в силата на изпълнението всичко, което съм чувал или мога да си представя, докато онези, познавали баща му, твърдят, че той на свой ред бил още по-велик. Кралят е на това мнение и, за да го докаже, ми изпя една хроматична тема за фуга, която дал на стария Бах, който пък веднага съставил от нея фуга в четири гласа, после в пет гласа и накрая в осем гласа.³

Разбира се, няма как да разберем кой от двамата, крал Фридрих или барон Ван Свитен, е преувеличил историята така прекомерно. Но това показва каква сила е набрала легендата за Бах към онова време. За да получите представа какво изключително нещо е фуга в шест гласа, в целия „Добре темперирано пиано“ на Бах, който съдържа 48 прелюдии и фуги, само две фуги имат пет гласа и изобщо няма шестгласна! Вероятно бихме могли да сравним импровизирането на фуга в шест гласа с това, да играеш едновременно 60 партии шах със завързани очи и да спечелиш всичките. Да бъде импровизирана фуга в осем гласа е действително извън човешките възможности.

В екземпляра, който Бах изпраща на крал Фридрих, на страницата преди първия нотен лист има следния надпис:



Фиг. 4.

(„Съгласно желанието на краля, песента и остатъкът с разрешение в каноническото изкуство“.) Тук Бах прави игра на думи с „канонически“, което значи не само „който се отнася до каноните“, но и „приет за образец“. Първите букви от посвещението са

R I C E R C A R

– италианска дума, която значи „търся“. И наистина има много какво да се търси в „Музикално приношение“. То се състои от една фуга в три гласа, една фуга в шест гласа, десет канона и триосоната. Музиковедите са стигнали до извода, че фугата в три гласа трябва да е по същество идентична с онази, която Бах импровизирал за крал Фридрих. Фугата в шест гласа е едно от най-сложните произведения на Бах, а нейната тема е, разбира се, кралската тема. Тази тема, дадена на фиг. 3, е много сложна, ритмично неравномерна и силно хроматична (т.е. изпълнена с тонове, които не принадлежат на тоналността ѝ). Да се напише прилична фуга дори само с два гласа би било доста трудно за средния музикант!

И двете фуги са озаглавени „ричеркар“ вместо „фуга“. Това е друго значение на думата ricercar – всъщност това било първоначалното име на музикалната форма, известна сега като фуга. По времето на Бах стандартното наименование вече било „фуга“, но терминът „ричеркар“ бил оцелял и се отнасял за фуга за ерудити, вероятно прекалено строго интелектуална за обикновеното ухо. Подобна употреба се е запазила и в съвременния английски език – думата *research* буквално означава „търсен“, но носи същия оттенък на трудно разбираема или претенциозна интелектуалност.

Трио-сонатата представлява възхитителна почивка от строгостта на фугите и каноните, тъй като е много мелодична и звучна, почти танцувална. Въпреки това и тя до голяма степен се основава на темата на краля с цялата ѝ хроматичност и строгост. Истинско чудо е, че Бах е успял да използва такава тема, за да сътвори толкова приятно интермецо.

Десетте канона в „Музикално приношение“ са едни от най-съвършените канони, писани от Бах. Но интересно е, че самият Бах така и не ги завършва. Това е преднамерено: те са загадки към крал Фридрих. По онова време е било обичайна музикална игра да се даде една тема с няколко подсказки с различна степен на сложност и да бъде оставен някой друг да „открие“ канона, базиран на тази тема. За да разберем как е възможно това, трябва да знаем някои факти относно каноните.

Канони и фуги

Идеята на канона се състои в това, че една тема се изпълнява на фона на самата себе си. Това се постига, като отделните участващи гласове изпълняват „копия“ на темата. Но има много начини да се направи това. Най-простият канон е обикновеният канон, като „Три слепи мишки“ (Three Blind Mice), „Греби, греби в лодката“ (Row, Row, Row Your Boat) или „Брат Жак“ (Frère Jacques). Тук темата се появява в първия глас и след фиксирано закъснение се появява нейно „копие“ в точно същата тоналност. След същото закъснение спрямо втория глас се появява третият глас с тази тема и т.н. Повечето теми не могат да хармонизират със себе си по този начин. За да бъде една тема подходяща за канон, всеки неин тон трябва да може да изпълнява двойна (или тройна, или четворна) роля – първо, да бъде част от мелодия и, второ, да бъде част от хармонизация на същата мелодия. Когато в канона има три гласа например, всеки тон от темата трябва да действа и като мелодия, и в две различни хармонии. По този начин всеки тон в канона има повече от едно значение; ухото и мозъкът на слушателя автоматично определят подходящото значение според контекста.

Разбира се, има и по-сложни видове канони. Първото нарастване на сложността идва, когато „копията“ на темата са измес-

тени не само във *времето*, но и във *височина*; тогава първият глас може да изпълнява темата, започвайки от *до*, а вторият глас, застъпвайки се с първия, може да изпълнява същата тема, като започва четири тона по-високо, от *сол*. Третият глас, който започва от *ре* още четири тона по-високо, може да препокрие първите два и така нататък. Следващото усложняване се получава, когато *скоростите* на двата гласа не са еднакви – вторият глас се изпълнява например два пъти по-бързо или два пъти по-бавно от първия. Първият вариант се нарича *скъсяване*, а вторият – *удължаване* (понеже темата като че ли се свива или се разширява).

Още не сме свършили! Следващата стъпка в сложността при изграждането на канони е темата да се *инвертира*, което значи да бъде създадена мелодия, която прави преход *надолу*, когато оригиналната мелодия преминава *нагоре*, при това с точно същия брой полутонове. Това е доста странна трансформация на мелодията, но когато човек е слушал много инвертирани теми, започва да му се струва съвсем естествена. Бах особено обича инверсията и тя често появява в произведенията му – и „Музикално приношение“ не е изключение. (Като един прост пример за инверсия пробвайте мелодията на „Добрият крал Венцеслас“. Когато оригиналът и инвертираният му вариант се пеят заедно, като се започне с интервал от една октава и забавяне от два такта, се получава приятен канон.) Накрая, най-екзотичният вид „копие“ е ракоходното копие – когато темата се изпълнява обратно във времето. Името не е изненадващо, като имаме предвид особеностите на движението на рака. Естествено, Бах включва ракоходен канон в „Музикално приношение“. Забележете, че всеки вид „копие“ запазва цялата информация от оригиналната тема, в смисъл, че темата може да бъде възстановена изцяло от което и да е копие. Подобна запазваща информацията трансформация често се нарича *изоморфизъм* и в тази книга неведнъж ще се срещаме с изоморфизми.

Понякога е желателно строгата форма на канона да бъде разхлабена. Това може да стане, като се позволят леки отклонения от точното копиране в името на по-гладка хармония. Също така някои канони имат „свободни“ гласове – гласове, които не следват темата на канона, а просто хармонизират добре с гласовете, които се намират в канон помежду си.

Всеки канон в „Музикално приношение“ има за тема различен вариант на кралската тема и всички гореописани похвати за създаване на канони са употребени в цялата си пълнота; всъщност дори понякога са съчетани. Така един тригласен канон е озаглавен *Canon per augmentationem, contrario motu* („Канон с удължаване и обратно движение“); неговият среден глас е свободен (всъщност той изпълнява кралската тема), докато другите два се движат канонически над и под него, използвайки похватите на удължаване и инверсия. Друг носи просто загадъчното заглавие *Quaerendo invenietis* („Търсейки, ще намерите“). Всички загадки от каноните са разрешени. Общоприетите решения са дадени от един от учениците на Бах, Йохан Филип Кирнбергер. Но можем да се питаме дали няма още решения, които чакат своето откриване!

Също така трябва да обясня накратко какво е фуга. Фугата е подобна на канона, доколкото обикновено се основава на една тема, която се изпълнява от различни гласове и в различни тоналности, и понякога с различно темпо, обърната „с главата надолу“ или отзад напред. Но концепцията за фугата е много поразчупена от тази на канона и поради това позволява по-голяма емоционална и художествена изразителност. Отличителен признак на фугата е начинът, по който започва – с единствен глас, който изпълнява темата ѝ. Когато той приключи, встъпва втори глас, или с четири степени по-високо, или с три по-ниско. Междувременно първият глас продължава с изпълнение на „контратема“ – втора тема, избрана да дава ритмичен, хармоничен и мелодичен контраст на темата. Следващите гласове встъпват последователно, всеки със своето изпълнение на темата – често под съпровода на контратемата в някой друг глас, – докато останалите гласове следват разните хрумвания на композитора. След като „пристигнат“ всички гласове, няма определени правила. Разбира се, има някои стандартни елементи – но не толкова стандартни, че да може да бъде композирана фуга просто така, по някакъв шаблон. Двете фуги в „Музикално приношение“ са изключителни образци в този жанр, които никога не биха могли да бъдат „композирани по шаблон“. Те притежават нещо много по-дълбоко от обикновеното звучене на фуга.

Като цяло „Музикално приношение“ е едно от върховете постижения на Бах в контрапункта. То самото представлява една

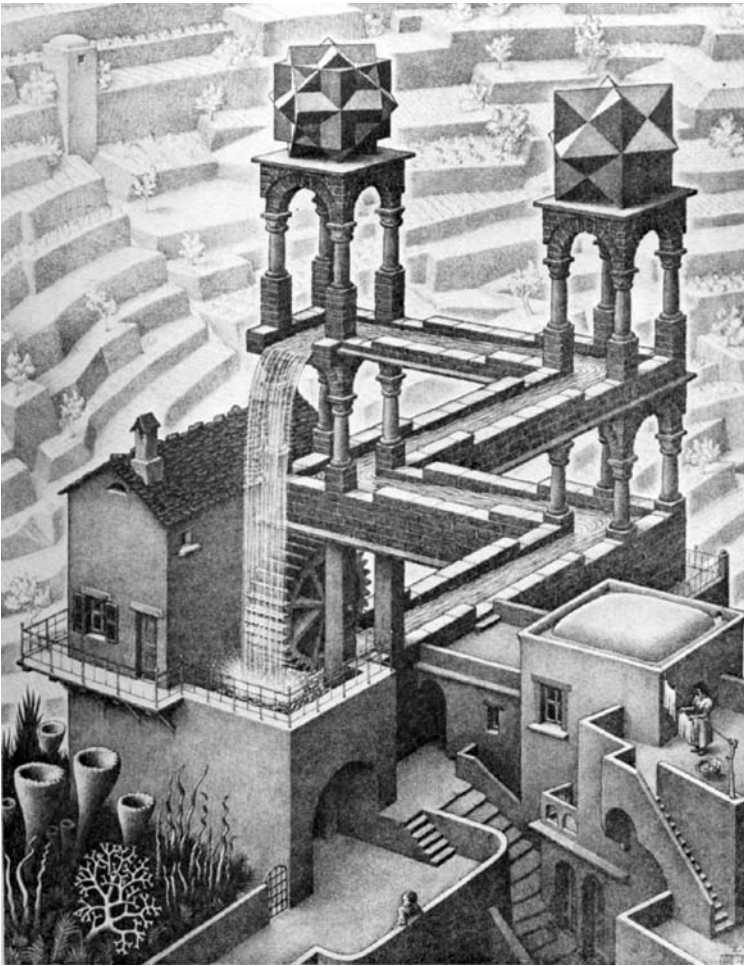
голяма интелектуална fuga, в която са преплетени много форми и идеи и където игрите двусмислици и тънките намеци са нещо обичайно. Тя е невероятно красиво творение на човешкия разум, на което можем да се наслаждаваме безкрайно. (Цялото произведение е чудесно описано в книгата „Музикално приношение“ на Й. С. Бах“ от Х. Т. Дейвид.)

Безкрайно извисяващ се канон

В „Музикално приношение“ има един канон, който е особено необичаен. Озаглавен е просто Canon per Tonos и има три гласа. Първият глас изпълнява вариант на кралската тема, а под него два гласа осигуряват каноническа хармонизация на базата на друга тема. По-ниският от двата гласа изпълнява своята тема в *до*-минор (което е тоналността на канона като цяло), а по-високият изпълнява същата тема, изместена по височина с квинта. Но този канон се отличава от всички останали по това, че когато завърши – или по-скоро, когато изглежда, че е завършил – вече не е в *до*-минор, а в *ре*-минор. По някакъв начин Бах е успял да модулира (да смени тоналността) под носа на слушателя. И канонът е изграден по такъв начин, че този „край“ се свързва гладко отново с началото; така процесът може да се повтори и да се стигне до тоналност *ми*, само за да се върнем пак в началото. Тези последователни модуляции водят до все по-отдалечени области на тоналността, тъй че след няколко поредни очакваме да сме безнадеждно далеч от началната тоналност. Но по някаква магична след точно шест такива модуляции оригиналната тоналност *до*-минор е възстановена! Всички гласове са точно една октава по-високо, отколкото са били в началото, и тук произведението може да бъде прекъснато по музикално приемлив начин. Навярно точно такава е било намерението на Бах, но несъмнено му е била приятна и мисълта, че този процес може да продължава до безкрайност, и вероятно затова е написал в полето „Както модуляцията се извисява, тъй нека се извисява славата на краля“. За да наблегна на потенциално безкрайния му характер, наричам този канон „Безкрайно извисяващ се канон“.

С него Бах ни дава първия пример за понятието „странен цикъл“. Феноменът „странен цикъл“ се случва, когато се движим нагоре (или надолу) през нивата на някаква йерархична система и

неочаквано се озоваваме там, откъдето сме тръгнали. (Тук системата е системата на музикалните тоналности.) Понякога използвам термина „оплетена йерархия“, за да опиша система, в която се появява странен цикъл. По-нататък темата на странните цикли ще изниква отново и отново. Понякога ще бъде скрита, друг път ще бъде пред очите ни, понякога ще бъде „в правилното положение“, друг път ще бъде „с главата надолу“ или пък на обратно. *Quaerendo invenietis* е моят съвет към читателя.



Фиг. 5. „Водопад“, М. Ешер (литография, 1961)

Ешер

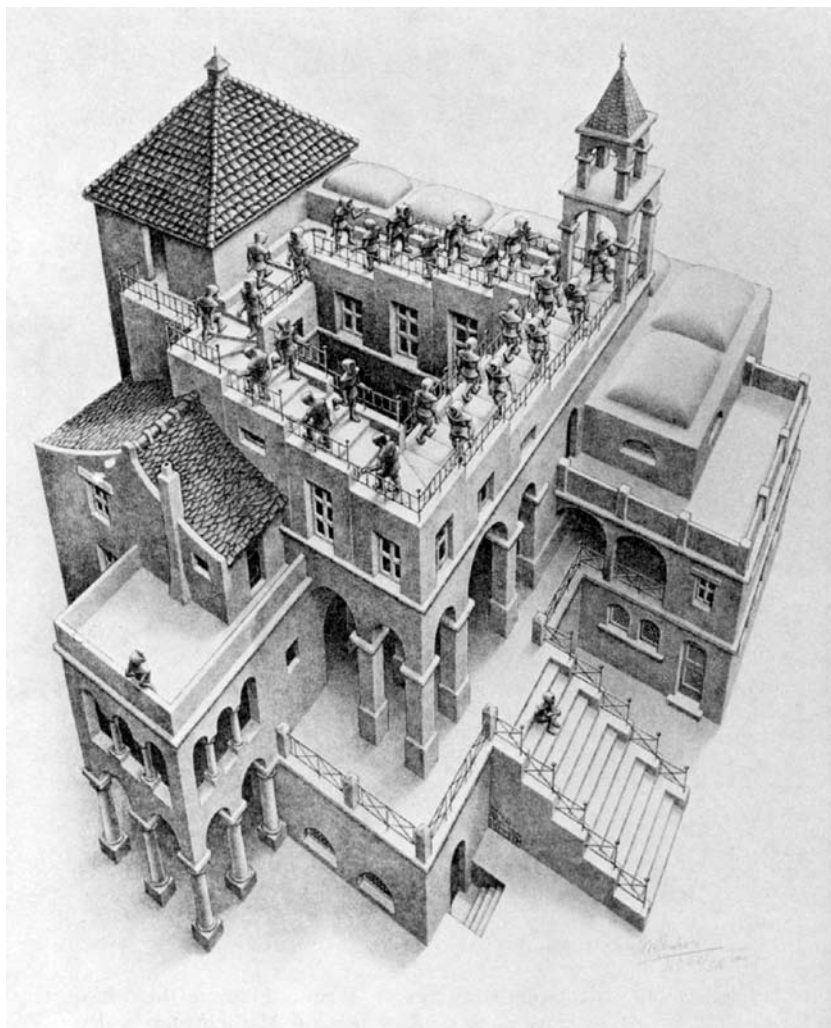
За мен най-красивото и въздействащо визуално пресъздаване на понятието за странни цикли е в работите на холандския график Мауриц Ешер, живял от 1898 до 1972 г. Ешер е съзателят на интелектуално най-стимулиращите рисунки на всички времена.

Много от тях се основават на парадокса, илюзията или двусмислицата. Едни от първите почитатели на рисунките на Ешер са математиците, което е разбираемо, понеже в тях често се ползват математически принципи на симетрия или закономерности... Но типичната графика на Ешер съдържа много повече от просто симетрия или закономерност; често има скрита идея, реализирана в художествена форма. В частност, странният цикъл е една от най-често повтарящите се теми в творчеството на Ешер. Погледнете например литографията „Водопад“ (фиг. 5) и сравнете нейния безкрайно спускащ се цикъл от шест стъпки с безкрайно извисяващия се цикъл от шест стъпки в Canon per Tonos. Приликата е забележителна. Бах и Ешер изпълняват една и съща тема в две различни „тоналности“: музика и изобразително изкуство.

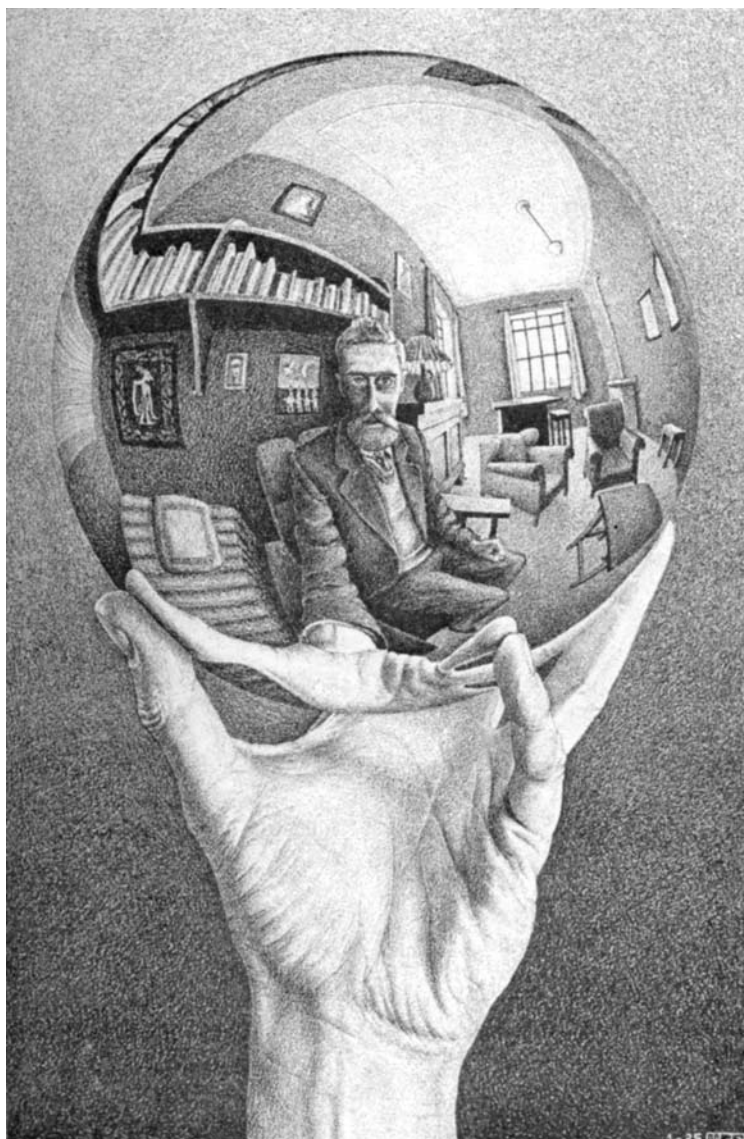
Ешер пресъздава странни цикли по няколко различни начина, които може да се подредят според това, доколко „стегнат“ е цикълът. Литографията „Качване и слизане“ (фиг. 6), където монаси вървят тежко във вечен кръг, е най-„хлабавият“ вариант, понеже има толкова много стъпки, преди да се стигне пак до началната точка. Един по-стегнат цикъл се съдържа във „Водопад“, който, както вече видяхме, съдържа само шест обособени стъпки. Може би си мислите, че има известна неяснота в понятието за единична „стъпка“ – например не може ли да твърдим, че „Качване и слизане“ има четири нива (стълбища), със същия успех, както и че притежава четирийсет и четири нива (стъпала)?

Действително броенето на нивата не само в картините на Ешер, но и въобще в йерархичните системи от много нива се отличава с неизбежна неопределеност. Впоследствие ще я разберем по-добре, а сега да не се отвлечаме прекалено. Като стягаме нашия цикъл, стигаме до забележителната „Рисуващи ръце“ (фиг. 135), където всяка от двете ръце рисува другата – странен цикъл от две стъпки. И накрая, най-стегнатият от всички странни цикли е показан в „Галерия с гравюри“ (фиг. 142): картина на картина, която съдържа себе си. Или пък е картина на галерия, която съдържа

себе си? Или на град, който съдържа себе си? Или младеж, който съдържа себе си? (Между другото, илюзията в основата на „Качване и слизане“ и „Водопад“ не е измислена от Ешер, а от британския математик Роджър Пенроуз през 1958 г. Но темата на странните цикли се наблюдава в работите на Ешер още от 1948 г., когато създава „Рисуващи ръце“. „Галерия с гравюри“ датира от 1956 г.)



Фиг. 6. „Качване и слизане“, М. Ешер (литография, 1960)



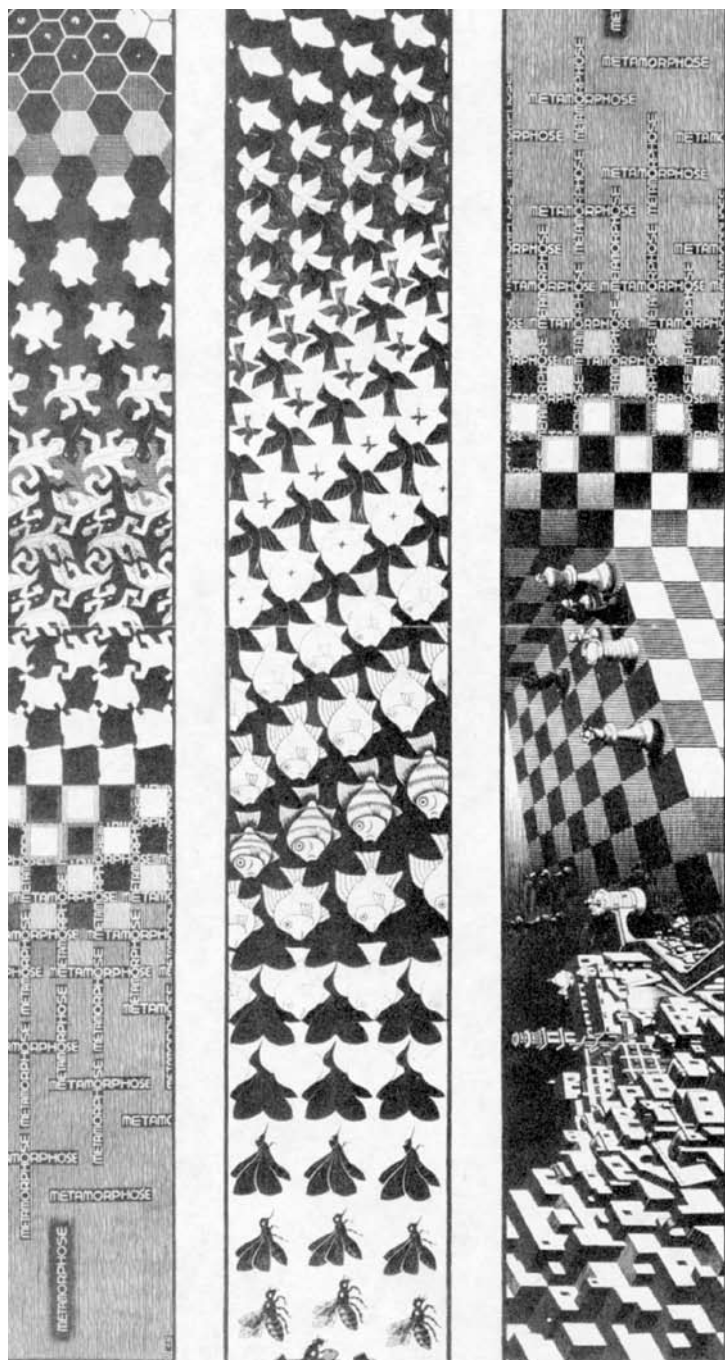
Фиг. 7. „Ръка с огледално кълбо“, автопортрет на М. Ешер
(литография, 1935)

В понятието за странен цикъл неявно се съдържа понятието за безкрайност, понеже какво друго е цикълът, ако не способ да бъде представен безкраен процес по краен начин? А безкрайността играе важна роля в много от рисунките на Ешер. Често копия от една тема се съчетават едно с друго и образуват визуални аналогии на каноните на Бах. Няколко такива мотива може да се видят в знаменитата гравюра на Ешер „Метаморфоза“ (фиг. 8). Тя донякъде прилича на Безкрайно извисяващия се канон – отдалечава се все повече и повече от началната си точка и изведнъж се оказва пак там. В равномерно покритиите с фигури равнини на „Метаморфоза“ и други картини вече се забелязват намеци за безкрайността. Но тя е представена още по-ярко в други рисунки на Ешер. В някои от тях една тема може да се появява на различни нива на реалност. Например може едно ниво в рисунката очевидно да изобразява фантастична или въображаема картина, а друго ниво да се разпознава като образ на действителността. Тези две нива може да са единствените явно изобразени. Но самото тяхно присъствие подканя зрителя да погледне на себе си като част от още едно ниво; и като прави тази стъпка, зрителят се оказва уловен в скритата верига от нива на Ешер, където за всяко ниво винаги има друго ниво с „по-голяма“ реалност над него и съответно под него винаги има „по-въображаемо“ ниво. Това може да бъде объркващо само по себе си. Но какво става, ако веригата от нива не е линейна, а образува цикъл? Кое е реално тогава и кое е фантазия? Геният на Ешер се състои в това, че той не само успява да измисли, но и да изобрази десетки полуреални, полумитични светове, изпълнени със странни цикли светове, в които като че ли кани своите зрители да влязат.

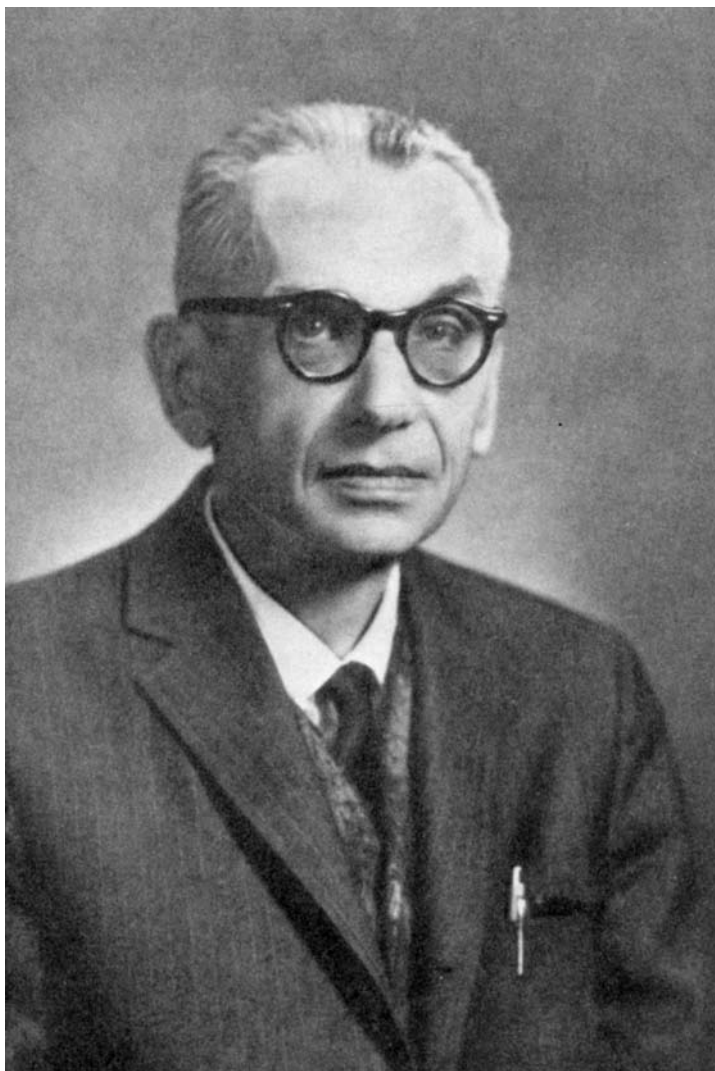
Гьодел

В разгледаните от нас примери за странни цикли от Ешер и Бах съществува конфликт между крайното и безкрайното и оттам едно силно усещане за парадоксалност. Интуитивно чувстваме, че тук се крие нещо математическо. И наистина, в нашия век* е открито тяхно математическо съответствие, а следствията от него са поразителни. И както циклите на Бах и на Ешер се обръщат към съвсем прости и отдавна интуитивно познати факти – нотна стълбица, стълбище, – така откритият от Курт Гьодел странен цикъл в математическите системи се корени в прости и отдавна интуитивно познати факти.

* Книгата е издадена за първи път през 1979 г. – Б. пр.



Фиг. 8. „Метаморфоза II“, М. Ешер (дърворез, 19,5 x 400 см, 1939–1940)



Фиг. 9. Курт Гьодел

Сведено до минималната си форма, откритието на Гьодел представлява превод на един древен философски парадокс на математически език. Това е т.нар. парадокс на Епименид или парадокс на лъжеца. Епименид бил жител на Крит, който изказал едно безсмъртно изречение: „Всички критяни са лъжци“. По-сил-

на версия на това твърдение е просто „Аз лъжа“ или пък „Това твърдение е лъжа“. Когато говоря за парадокса на Епименид, обикновено ще имам предвид последния вариант. Това е твърдение, което грубо потъпква обичайно допусканата дихотомия на твърденията на истинни и неистинни, понеже ако за момент приемем, че е истинно, веднага се получава точно обратният ефект и то ни кара да си мислим, че е неистинно. Но щом решим, че е неистинно, подобен обратен ефект ни връща към мисълта, че трябва да е истинно. Опитайте!

Парадоксът на Епименид е странен цикъл от една стъпка, както „Галерия с гравюри“ на Ешер. Но каква е връзката му с математиката? Това открива Гьодел. Неговата идея е да използва математически разсъждения при изследването на самите математически разсъждения. Тази концепция да се направи математиката „интроспективна“ се оказва извънредно мощна, а може би най-сериозното следствие от нея е откритието на Гьодел: теоремата на Гьодел за непълнота. Какво гласи теоремата и как се доказва тя, са две различни неща. В тази книга ще обсъдим и двете в достатъчно подробности. Теоремата може да бъде оприличена на перла, а нейното доказателство – на мида. Перлата се цени заради своя блясък и простота; мидата е сложно живо същество, от чиито „вътрешности“ се появява тази загадъчно проста скъпоценност.

Теоремата на Гьодел се появява като теорема VI в статията му от 1931 г. „Относно формално неразрешимите твърдения в „Principia Mathematica“ и сродни системи I“. Тя гласи:

На всеки ω -непротиворечив рекурсивен клас κ от формули съответстват рекурсивни знаци за клас γ такива, че нито $v \in \text{Gen } \gamma$, нито $\text{Neg}(v \in \text{Gen } \gamma)$ принадлежат към $\text{Flg}(\kappa)$ (където v е свободната променлива на γ).

Всъщност е била написана на немски, а вероятно си мислите, че и в този вид не е по-разбираема. Затова да я предадем на по-нормален език:

Всички непротиворечиви аксиоматични формулировки на теорията на числата съдържат неразрешими твърдения.

Това е перлата.

Трудно е да видим странен цикъл в тази перла. Това е, защото странният цикъл е скрит в мидата – в доказателството. Доказателството на теоремата на Гьодел за непълнота предполага конструирането на самопозоваващо се математическо твърдение, също както парадоксът на Епименид е самопозоваващо се езиково твърдение. Но докато да се говори за езика с език е много лесно, съвсем не е лесно да се види как едно твърдение за числа може да говори за самото себе си. Всъщност е бил необходим гений даже само да свърже идеята за самопозоваващи се твърдения с теорията на числата. Веднъж щом Гьодел прозрял, че е възможно да се създаде подобно твърдение, той бил преминал основното препятствие. Същинското построяване на твърдението е резултат от този ослепителен проблясък на интуиция.

Ще разгледаме построението на Гьодел в идните глави, но за да не стоите в пълно неведение, ще нахвърлям същността на идеята с няколко шриха, като се надявам, че това на свой ред ще породи идеи у вас. Първо, трябва съвсем ясно да посочим трудността. Математическите твърдения – да се съсредоточим върху тези от теорията на числата – се отнасят за свойства на целите числа. Целите числа не са твърдения, нито са техни свойства. Едно твърдение от теорията на числата не *се отнася* за твърдение от теорията на числата, то просто *е* твърдение от теорията на числата. Това е проблемът; но Гьодел разбира, че тук е скрито нещо повече.

Гьодел прозира, че едно твърдение от теорията на числата би могло *да се отнася* за твърдение от теорията на числата (дори евентуално за себе си), ако по някакъв начин числата могат да символизират твърдения. С други думи, сърцето на неговото построение е идеята за код. В кода на Гьодел, обикновено наричан „гьоделово номериране“, числата представят символи и последователности от символи. По този начин всяко твърдение от теорията на числата, понеже е последователност от специализирани символи, придобива гьоделов номер, нещо подобно на телефонен или регистрационен номер, посредством който можем да се позоваваме на твърдението. И този трик с кодиране позволява твърденията от теорията на числата да бъдат разбирани на две различни нива – като твърдения от теорията на числата и като *твърдения за твърдения* от теорията на числата.

Щом Гьодел измисля тази схема за кодиране, трябвало да разработи конкретен начин за пренасяне на парадокса на Епименид във формализма на теорията на числата. Неговият окончателен вариант на този парадокс гласи не „това твърдение от теорията на числата е неистинно“, а „това твърдение от теорията на числата няма доказателство“. Това може да доведе до големи обърквания, понеже представата на хората за понятието „доказателство“ обикновено е доста мъглява. Всъщност работата на Гьодел е само част от продължителните опити от страна на математиците да изяснят на самите себе си какво са доказателствата. Важно е да запомним, че доказателствата са нагледни демонстрации в рамките на фиксирани системи от твърдения. В случая със статията на Гьодел фиксираната система от разсъждения в теорията на числата, за която се отнася думата „доказателство“, е системата на „Principia Mathematica“ (PM), колосален опус от Бъртранд Ръсел и Алфред Норт Уайтхед, издаден между 1910 и 1913 г. Поради това Гьоделовото изречение G е по-уместно да се запише на естествен език така:

Това твърдение от теорията на числата няма доказателство в системата на „Principia Mathematica“.

Между другото, това Гьоделово изречение G не е Теоремата на Гьодел – както наблюдението „Изречението на Епименид е парадокс“ не е изречението на Епименид. Сега можем да обясним последиците от откриването на G. Докато твърдението на Епименид създава парадокс, понеже е нито вярно, нито невярно, Гьоделовото изречение G е недоказуемо (в рамките на PM), но вярно. И какъв е основният извод? Че системата на „Principia Mathematica“ е „непълна“ – съществуват истинни твърдения от теорията на числата, за чието получаване нейните доказателствени методи са твърде слаби.

Но ако „Principia Mathematica“ е първата жертва на този удар, в никакъв случай не е последната! Изразът „и сродни системи“ в заглавието на статията на Гьодел е показателен; ако резултатът на Гьодел просто показваше дефект в работата на Ръсел и Уайтхед, то други хора щяха да бъдат окуражени да подобрят PM и да надхитрят теоремата на Гьодел. Но това не е възможно: доказателството на Гьодел важи за всяка аксиоматична система, която претендира да постигне целите, които Уайтхед и Ръсел по-

ставят пред себе си. И за всяка различна система номерът става посредством един и същ прост метод. Накратко, Гьодел показва, че доказуемостта е по-слабо понятие от истината, независимо за каква аксиоматична система става дума.

Така Теоремата на Гьодел оказва потресаващ ефект върху логици, математици и философи, които се интересуват от основите на математиката, понеже показва, че никоя фиксирана система, независимо колко е сложна, не може да предаде сложността на целите числа: 0, 1, 2, 3... За съвременните читатели това може да не е толкова стъписващо, колкото за читателите през 1931 г., тъй като междуременно нашата култура е асимилирала теоремата на Гьодел заедно с концептуалните революции на относителността и на квантовата механика, а техните философско обвъркващи послания са достигнали до обществото, макар и смекчени от няколко слоя препредаване (и обикновено неясноти). В днешно време съществува общо настроение да се очакват „ограничителни“ резултати, но през 1931 г. Теоремата на Гьодел се е появила като гръм от ясно небе.

Математическа логика – кратък преглед

За да бъде оценена по достойнство Теоремата на Гьодел, трябва да се познава нейният контекст. Затова сега ще се опитам да обобща накратко историята на математическата логика преди 1931 г. – невъзможна задача. (Вижте Делонг, Нийбоун или Нейджъл и Нюман за добри исторически изложения.) Всичко започва с опитите да бъдат механизирани мисловните процеси за получаване на съждения. Често се твърди, че способността ни да разсъждаваме е онова, което ни отличава от другите живи същества, тъй че на пръв поглед изглежда донякъде парадоксално да механизираме най-човешката от всички дейности. Но още древните гърци знаели, че разсъждаването е следващ закономерности процес и поне отчасти се управлява от закони, които могат да бъдат изказани. Аристотел систематизира силогизмите, а Евклид систематизира геометрията, но след това трябва да минат много векове, преди отново да има напредък в изучаването на аксиоматичното мислене.

Едно от значителните открития в математиката от XIX век е, че съществуват различни и еднакво валидни геометрии – къ-

дето под „геометрия“ се има предвид теория на свойствата на абстрактни точки и прави. От край време се смятало, че геометрията се изчерпва с изложеното от Евклид и че макар в неговото представяне да има дребни недостатъци, те са маловажни и действителен прогрес в геометрията може да се постигне само чрез разширяване на постигнатото от Евклид. Това схващане е разбито от приблизително едновременното откриване на неевклидова геометрия от няколко души – откритие, което разтърсва математическата общност, защото подлага на сериозно изпитание представата, че математиката изучава реалния свят. Как е възможно да има множество различни видове „точки“ и „прави“ в една-единствена реалност? Днес решението на дилемата може да е очевидно дори и за някои нематематици, но по онова време тя сее смут в математическите кръгове.

По-късно през XIX век английските логици Джордж Бул и Огъстъс де Морган стигат значително по-далеч от Аристотел в систематизирането на строго дедуктивните закономерности при разсъжденията. Бул дори нарича своята книга „Законите на мисленето“ – несъмнено преувеличение, но все пак важен принос. Луис Карол бил очарован от тези механизирани методи за разсъждаване и измислил много загадки, които може да се решат чрез тях. Готлоб Фреге в Йена и Джузепе Пеано в Торино работят върху съчетаването на формалните разсъждения с изучаването на множествата и числата. В Гьотинген Давид Хилберт работи върху формализации на геометрията, по-строги от изложението на Евклид. Всички тези усилия са насочени към изясняването на онова, което имаме предвид под „доказателство“.

Междувременно и в класическата математика се случват интересни събития. През 80-те години на XIX век Георг Кантор разработва теория на различни типове безкрайност, наречена *теория на множествата*. Тя е мощна и красива, но противоречи на интуицията. Не след дълго са намерени различни парадокси от теорията на множествата. Положението било много обезпокоително, защото тъкмо изглеждало, че математиката се възстановява от едни парадокси – свързани с понятието за граница в математическия анализ, – когато се появява съвсем нова група, които изглеждат още по-тежки!

Най-известен е парадоксът на Ръсел. Повечето множества не са членове на самите себе си – например множеството от мор-

жове не е морж, множеството, което съдържа само Жана д'Арк, не е Жана д'Арк (множеството не е човек) и така нататък. В това отношение повечето множества са доста „стандартни“. Но някои „самопоглъщащи се“ множества *съдържат* себе си като членове, например множеството от всички множества или множеството от всички неща освен Жана д'Арк и т.н. Очевидно всяко множество е или стандартно, или самопоглъщащо се и не може да бъде и двете. Но нищо не ни спира да измислим R , *множеството от всички стандартни множества*. Първоначално R изглежда съвсем стандартно творение – но трябва да преразгледаме това мнение, когато се запитаем: „Какво е самото R , стандартно множество или самопоглъщащо се?“. Ще видите, че отговорът е: „ R не е нито стандартно, нито самопоглъщащо се множество, понеже и двата варианта водят до парадокс“. Опитайте!

Но ако R не е нито стандартно, нито самопоглъщащо се, тогава какво е? Най-малкото патологично. Но подобни уклончиви отговори не били достатъчни за никого. Затова започнали да се ровят все по-дълбоко в основите на теорията на множествата. Решителните въпроси били: „Какво не е наред с нашето интуитивно понятие за множество? Можем ли да изградим строга теория на множествата, която е достатъчно близка до нашата интуиция, но заобикаля парадоксите?“ И тук, както в теорията на числата и в геометрията, проблемът е, че се опитваме да съчетаем интуицията с формализирани, или аксиоматизирани, системи от разсъждения.

Ако вместо множества се използват прилагателни, се получава любопитен вариант на парадокса на Ръсел, известен като парадокс на Грелинг. Да разделим прилагателните на две групи: такива, които описват сами себе си, като „трисричен“, „странностен“ и „recherché“, и такива, които не се самоописват, като „ядивен“, „непълен“ и „двусричен“. Ако приемем „несамоописващ се“ за прилагателно, към кой клас принадлежи то? А ако ви се струва некоректно да смятаме словосъчетания за прилагателни, можем да ползваме два термина, измислени специално за този парадокс: *автологичен* („самоописващ се“) и *хетерологичен* („несамоописващ се“). Тогава въпросът става: „Хетерологично ли е „хетерологично“?“ Опитайте!

Във всички тези парадокси изглежда, че има един виновник, а именно самопозоваването или „странната цикличност“. Тъй че

ако целта е да премахнем всички парадокси, защо да не опитаме да премахнем самопозоваването и всичко, което му позволява да възникне? Това не е толкова лесно, колкото изглежда, защото може да е трудно да се разбере къде точно се появява самопозоваването. То може да бъде разпространено в цял странен цикъл с няколко стъпки, както в тази „разширена“ версия на Епименид, която напомня за „Рисуващи ръце“:

Следващото изречение е лъжа.
Предишното изречение е истина.

Взети заедно, тези изречения имат същия ефект като оригиналния парадокс на Епименид, но поотделно са безобидни и дори потенциално полезни изречения. „Вината“ за този странен цикъл не може да бъде приписана на нито едно от двете – само на начина, по който „сочат“ едно към друго. По същия начин всяка локална област от „Качване и слизане“ е съвсем правомерна, единствено начинът, по който те са съчетани глобално, създава невъзможността. Тъй като съществуват не само преки, но и непреки начини за постигане на самопозоваване, трябва да измислим как да премахнем и двата вида едновременно – ако смятаме самопозоваването за корен на всички злини.

Прогонване на странните цикли

Това е възгледът, който Ръсел и Уайтхед споделят, съответно „Principia Mathematica“ е колосално упражнение по прогонване на странните цикли от логиката, теорията на множествата и теорията на числата. Идеята на тяхната система е, най-общо, следната. Множество от най-ниския „тип“ може да съдържа като членове единствено „обекти“, но не и множества. Множество от следващия тип може да съдържа само обекти или множества от най-ниския тип. Изобщо, множество от даден тип може да съдържа единствено множества от по-нисък тип или обекти. Всяко множество принадлежи на конкретен тип. Очевидно никое множество не може да съдържа себе си, понеже в такъв случай трябва да принадлежи на тип, по-висок от неговия. В такава система съществуват единствено „стандартни“ множества; освен това старото R – множеството от всички стандартни множества – вече

въобще не се смята за множество, тъй като не принадлежи на никой краен тип. И тъй по всичко личи, че тази *теория на типовете*, която бихме могли да наречем и „теория за премахването на странните цикли“, успява да излекува теорията на множествата от нейните парадокси, но с цената на въвеждането на изкуствена йерархия и забраната за образуване на определени видове множества, като множеството от всички стандартни множества. Това не е точно начинът, по който интуитивно си представяме множествата.

Теорията на типовете се справя с парадокса на Ръсел, но не постига нищо с парадокса на Епименид или този на Грелинг. За хората, чиито интереси не се простират отвъд теорията на множествата, това е съвсем достатъчно, но за хората, заинтересувани от пълното елиминиране на парадоксите, изглеждало необходимо въвеждането на подобно „йерархизиране“, за да се забрани цикличното връщане в езика. На дъното на подобна йерархия ще бъде нещо, което наричаме *обектен език*. Тук позоваване може да се прави само към конкретна област, но не към аспекти на самия обектен език (като неговите граматически правила или конкретни изречения в него). За тази цел ще има *метаезик*. Това положение е познато на всички, които са учили чужд език. След това ще има метаметаезик, с който да се обсъжда метаезикът, и така нататък. Освен това ще се изисква всяко изречение да принадлежи към някое ниво от йерархията. Следователно, ако не може да бъде намерено ниво, където да бъде поставено дадено изказване, то изказването ще се смята за безсмислено и ще бъде забравено.

Можем да опитаме да анализираме дадения по-горе цикъл на Епименид от две стъпки. Тъй като първото изречение говори за второто, трябва да бъде на по-високо ниво от него. Но по същата логика второто изречение трябва да е на по-високо ниво от първото. Понеже това е невъзможно, двете изречения са „безсмислени“. По-точно, подобни изречения просто изобщо не могат да бъдат формулирани в система, основаваща се на строга йерархия от езици. Това предотвратява всички варианти на парадокса на Епименид и на парадокса на Грелинг. (На кое езиково ниво ще принадлежи „хетерологичен“?)

В теорията на множествата, която се занимава с абстракции, които не използваме през цялото време, структура от нива като теорията на типовете изглежда приемлива, ако и малко странна –

но когато става дума за такава неотменна част от живота като езика, подобни нива са абсурдни. Когато говорим за разни неща, не мислим за себе си като прескачащи нагоре-надолу по йерархия от езици. Едно съвсем обикновено изречение като „В тази книга аз критикувам теорията на типовете“ ще бъде двойно забранено в обсъжданата от нас система. Първо, то говори за „тази книга“, която може да се споменава единствено в „метакнига“, и второ, в него се споменавам аз – личност, за която изобщо не ми е позволено да говоря! Този пример показва колко глупава изглежда теорията на типовете, когато я пренесем в познат контекст. Възприетото от нея лечение за парадоксите – пълно премахване на самопозоваването във всичките му форми – е прекалено, тъй като заклеява много съвсем нормални конструкции като безсмислени. Между другото, прилагателното „безсмислен“ ще трябва да важи за всички дискусии върху теорията за лингвистичните типове (като обсъждането в този абзац), понеже те очевидно не може да се случват на никое ниво – нито на нивото на обектния език, нито на метаезика, нито на метаметаезика и т.н. Самият акт на обсъждане на теорията ще бъде възможно най-грубото нейно нарушаване!

Някои биха опитали да защитят подобни теории, като изтъкнат, че те са били предвиждани само за формални езици, не за обикновения, неформален език. Може и да е така, но тогава това показва, че тези теории са изключително академични и нямат особено отношение към парадоксите, освен когато такива се появяват в специално конструирани системи. Освен това стремежът да бъдат елиминирани парадоксите на всяка цена, особено когато това изисква създаването на силно изкуствени формализми, слага твърде голямо ударение върху скучната непротиворечивост и твърде малко върху чудатото и фантастичното, които правят живота и математиката интересни. Разбира се, важно е да опитваме да запазим непротиворечивостта, но когато това желание ни докарва невъобразимо грозна теория, значи нещо не е наред.

Тези проблеми с основите на математиката предизвикват голямия интерес към систематизиране на използваните от хората методи за разсъждаване, който се наблюдава в първите десетилетия на този век. Математици и философи започват сериозно да се съмняват дали даже най-конкретните теории, като изучаването на целите числа (теорията на числата), са построени върху

солидна основа. Ако толкова лесно може да се появяват парадокси в теорията на множествата – теория, чието основно понятие, множеството, е несъмнено интуитивно привлекателно, – тогава дали те не съществуват и в други области от математиката? Друго свързано с това притеснение е, че парадоксите на логиката, като този на Епименид, може да се окажат присъщи на математиката и така да хвърлят съмнение върху цялата математика. Това е особено тревожно за онези – а те съвсем не били малко, – които смятат, че математиката е просто клон от логиката (или обратното, че логиката е просто клон от математиката). Всъщност точно този въпрос – „Математиката и логиката отделни ли са, или са едно?“ – предизвиквал сериозни дебати.

Това изучаване на самата математика става известно като *метаматематика* – наричано понякога и *металогика*, понеже математиката и логиката са така преплетени. Най-важната задача на метаматематиците била да определят истинската природа на математическите разсъждения. Кое е правомерна процедура и кое не е? Тъй като математическите разсъждения винаги са били правени на някакъв „естествен език“ (например френски или латински, или някакъв език за нормално общуване), винаги е съществувала голяма опасност от двусмислици и неяснота. Думите имат различно значение за различните хора, предизвикват различни образи и прочие. Изглеждало разумно и дори важно да се въведе една единна нотация, с която да се извършва цялата математическа работа и с чиято помощ които и да са двама математици да могат да разрешат споровете дали дадено доказателство е валидно, или не. Това налагало пълно систематизиране на всеобщо приемливите начини на разсъждения на хората, поне доколкото се отнасят за математиката.

Непротиворечивост, пълнота, програма на Хилберт

Такава е целта на „Principia Mathematica“, която претендира да извежда цялата математика от логиката, при това, естествено, без противоречия! Тя е посрещната с всеобщо възхищение, но никой не е сигурен дали (1) наистина цялата математика се съдържа в методите, очертани от Ръсел и Уайтхед и дали (2) дадените методи са непротиворечиви сами по себе си. Абсолютно сигурно ли е, че

ако се следват методите на Ръсел и Уайтхед, *никога* не може да бъдат изведени противоречиви резултати от нито един математик?

Този въпрос особено притеснява изтъкнатия немски математик (и метаматематик) Давид Хилберт, който поставя пред световната общност от математици (и метаматематици) следното предизвикателство: да бъде показано строго – евентуално като се следват дадените от Ръсел и Уайтхед методи, – че определената в „Principia Mathematica“ система е едновременно *непротиворечива* и *пълна* (т.е. че всяко истинно твърдение от теорията на числата може да бъде изведено в теоретичните рамки на РМ). Това е сериозна задача и може да бъде критикувана заради това, че притежава известна цикличност – как можеш да оправдаеш методите си за разсъждение на базата на същите тези методи за разсъждение? Това е като да се вдигнеш, дърпайки се за косата. (Като че ли не можем да се отървем от тези странни цикли!)

Разбира се, Хилберт е абсолютно наясно с тази дилема и затова изказва надеждата, че може да бъде намерено доказателство за непротиворечивост или пълнота, което използва единствено „финитистки“ доказателствени методи. Това е един малък набор доказателствени методи, обикновено приемани от математиците. По този начин Хилберт се надява математиците да успеят отчасти да се издърпат за косата си: да се докаже, че всички математически методи са обосновани, като се използва само едно по-малко множество от методи. Тази цел може да изглежда твърде екзотична, но занимава умовете на много от най-великите математици в света през първите трийсет години от този век.

Но през трийсет и първата му година Гьодел публикува своята статия, която в някои отношения разбива на пух и прах програмата на Хилберт. Статията разкрива не само, че в предложената от Ръсел и Уайтхед система има непоправими „дупки“, но и по-общо, че абсолютно никоя аксиоматична система не може да произведе всички истини от теорията на числата, освен ако не е противоречива! И накрая показва, че надеждата да се докаже непротиворечивостта на система като дадената в РМ е напразна: ако подобно доказателство бъде намерено единствено с методите на РМ, тогава – и това е едно от най-смущаващите следствия от работата на Гьодел – самата РМ ще бъде противоречива!

Окончателната ирония във всичко това е, че доказателството на теоремата на Гьодел за непълнота включва вкарване на па-

радоса на Епименид в сърцето на „Principia Mathematica“, уж не-уязвимия срещу атаките на странните цикли бастион! Въпреки че странният цикъл на Гьодел не унищожавя „Principia Mathematica“, той я прави значително по-малко интересна за математиците, тъй като показва, че първоначалните цели на Ръсел и Уайтхед са илюзорни.

Бабидж, компютри, изкуствен интелект...

Когато излиза статията на Гьодел, светът е съвсем близо до разработването на електронни цифрови компютри. Разбира се, идеята за механични изчислителни машини съвсем не е нова. През XVII век Паскал и Лайбниц проектират машини, които извършват твърдо зададени операции (събиране, умножение). Но тези машини нямат памет и не са програмируеми, ако използваме съвременен език.

Първият човек, който се досеща за гигантския изчислителен потенциал на машините, е лондончанинът Чарлс Бабидж (1792 – 1871). Образ, сякаш излязъл от страниците на роман на Дикенс, през живота си Бабидж е най-известен с енергичната си кампания да отърве Лондон от „уличните дразнения“ – най-вече латернаджииите. Тези зловредни същества обожават да го ядосват, затова му изнасят серенади по всяко време на деня и нощта, а той ги гони яростно по улицата. Днес ние виждаме в Бабидж човек, изпреварил времето си със сто години: той не само изобретява основните принципи на съвременните компютри, но и е един от първите борци срещу шумовото замърсяване.

Първата му машина, „Диференциалната машина“, може да генерира много различни видове математически таблици с помощта на „метода на разликите“. Но преди да бъде построен модел на „ДМ“, Бабидж се запалва по много по-революционна идея, неговата „Аналитична машина“. Доста нескромно той пише: „Пътят, по който достигнах до нея, е вероятно най-заплетеният и сложен, някога раждал се в ума на човек“⁴. За разлика от всички проектирани дотогава машини, ДМ притежава и „склад“ (памет), и „мелница“ (устройство за изчисления и за вземане на решения). Тези устройства се състоят от хиляди цилиндри със зъбци, зацепени по невероятно сложен начин. Бабидж си представял как числата се вият навътре и навън от мелницата под управление-

то на *програма*, съдържаща се в перфокарти – идея, вдъхновена от управлявания от карти жакардов стан, който тъче изумително сложни фигури. Отличаващата се с блестящ ум, но сполетяна от незавидна съдба приятелка на Бабидж, графиня Ада Лъвлейс (дъщеря на лорд Байрон) коментира поетично, че „Аналитичната машина *тъче алгебрични фигури* също както жакардовият стан тъче цветя и листа“. За съжаление употребеното от нея сегашно време подвежда, защото АМ така и не е построена, а Бабидж умира горчиво разочарован.

Лейди Лъвлейс, също както и Бабидж, е съвсем наясно, че с изобретяването на Аналитичната машина човечеството флиртува с механизирания интелект – особено ако машината е способна „да погълне собствената си опашка“ (както Бабидж описва странния цикъл, който се получава, когато машината сама промени съхранената в себе си програма). В един мемоар от 1842 г.⁵ тя пише, че АМ „би могла да действа върху други неща, освен *числа*“. Докато Бабидж мечтае да създаде автомат за игра на шах или на морски шах, тя изказва предположение, че ако във въртящите се цилиндри на неговата машина се кодират тонове и хармонии, тя „би могла да композира изкусни и научни музикални произведения с произволна степен на сложност или продължителност“. Но почти веднага след това тя предупреждава, че „Аналитичната машина няма ни най-малки претенции да *създава* каквото и да било. Тя може да прави само онова, което знаем *как да й наредим* да извърши“. Макар да разбира добре мощта на изкуствените изчисления, лейди Лъвлейс е скептична относно изкуственото създаване на разум. Но дали с цялата си проникателност е могла и да сънува потенциала, който ще се разкрие с укротяването на електричеството?

В нашия век назрява времето за компютри – компютри отвъд най-безумните мечти на Паскал, Лайбниц, Бабидж или лейди Лъвлейс. През 30-те и 40-те години са проектирани и построени първите „гигантски електронни мозъци“. Те катализират сливането на три дотогава отделни области: теорията на аксиоматизираните разсъждения, изучаването на механичните изчисления и психологията на разума.

В същите тези години теорията на компютрите се развива с гигантски крачки. Тя е тясно свързана с метаматематиката. Всъщност теоремата на Гьодел има съответствие в теорията на

алгоритмите, открито от Алън Тюринг, което показва съществуването на неизбежни „дупки“ дори в най-мощния компютър, който можем да си представим. По ирония, точно докато биват установявани тези донякъде призрачни граници, се изграждат истински компютри, чиято мощ изглежда непрекъснато надвишава и най-смелите предвиждания на създателите им. Бабидж, който веднъж обявил, че с радост би се отказал от остатък от живота си, ако може да се завърне след 500 години и три дни да бъде разведен на научна обиколка в новата епоха, сигурно щеше да онемее от вълнение само век след смъртта си – и от новите машини, и от неочакваните им ограничения.

В началото на 50-те години механизираният интелект изглежда само на хвърлей камък; но след всяка преодоляна бариера изникват нови препятствия пред действителното създаване на истински мислеща машина. Да не би да има някаква дълбока причина за мистериозното отдалечаване на тази цел?

Никой не знае къде се намира границата между неинтелигентно и интелигентно поведение; всъщност вероятно е глупаво да смятаме, че съществува ясна граница. Но несъмнено основни способности на разума са:

- да реагира много гъвкаво в различни ситуации;
- да се възползва от щастливо стечение на обстоятелствата;
- да разбира двусмислени или противоречащи си съобщения;
- да различава относителната важност на различните елементи от дадена ситуация;
- да намира прилики между ситуации въпреки разликите, които може да ги разделят;
- да намира разлики между ситуации въпреки приликите, които може да ги свързват;
- да синтезира нови понятия, като взима стари и ги съчетава по нови начини;
- да предлага непознати идеи.

Тук на пръв поглед се сблъскваме с парадокс. Компютрите по своята природа са творения, лишени от всякаква гъвкавост и желания, които единствено следват правила. Колкото и да са бързи, те си остават възплъщение на несъзнателността. Тогава как е възможно да бъде програмирано интелигентно поведение?

Не е ли това очевиден оксиморон? Една от основните тези в тази книга е, че няма никакво противоречие. Една от основните цели на тази книга е да подтикне всеки читател да се изправи смело срещу видимото противоречие, да вкуси от него, да го огледа от всякъде, да го разглоби на съставните му части, да потъне в него, тъй че накрая да е получил ново разбиране за привидно непреодолимата бездна между формалното и неформалното, живото и неживото, гъвкавото и неизменното.

В това се заключават изследванията по изкуствен интелект (ИИ). Странна особеност на работата по ИИ е, че хората се опитват да съставят дълги набори от правила в строги формализми, които да укажат на негъвкавите машини как да бъдат гъвкави.

Но що за „правила“ ще са тези, които да могат да уловят всичко онова, което смятаме за интелигентно поведение? Несъмнено трябва да има правила на най-различни нива. Трябва да има „просто обикновени“ правила. Трябва да има „метаправила“, които да модифицират „просто обикновените“ правила; после „метаметаправила“ за промяна на метаправилата и т.н. Гъвкавостта на разума идва от огромния брой различни правила и нива от правила. Причината да трябва да съществуват толкова много правила на толкова много нива е, че в живота живото същество се изправя пред милиони ситуации от напълно различни видове. За някои ситуации съществуват стереотипни отговори, които изисква „просто обикновени“ правила. Някои ситуации са смес от стереотипни ситуации – затова са нужни правила, с които да се реши кои „просто обикновени“ правила да бъдат приложени. Някои ситуации не могат да бъдат класифицирани – затова трябва да има правила за измислянето на нови правила... и прочие, и прочие. Без съмнение в основата на разума са странни цикли, включващи правила, които променят себе си пряко или непряко. Понякога сложността на нашия ум изглежда толкова необятна, че смятаме, че проблемът за разбирането на разума е нерешим – че е грешно да си мислим, че изобщо някакви правила управляват поведението на човек, дори и ако под „правило“ имаме предвид описаната по-горе конструкция от много нива.

... и Бах

През 1754 г., четири години след смъртта на Й. С. Бах, в един трактат за музиката и душата теологът от Лайпциг Йохан Михаел Шмит пише следния достоен за внимание откъс:

Преди не много години от Франция дойде известие, че един човек направил статуя, която може да свири различни произведения на флейта, вдига флейтата към устата си и я сваля, върти очи и т.н. Но още никой не е измислил изваяние, което мисли или желае, или композира, или въобще прави нещо подобно. Нека всеки, който иска да се убеди в това, да се вгледа внимателно в последната fuga на възхваления погоре Бах, която се появи гравирана на мед, но която е останала незавършена заради неговата слепота, и нека забележи съдържачото се в нея изкуство; или което трябва да го порази като още по-удивително, хорала, който Бах в слепотата си продиктувал на чуждо перо, „Когато сме в крайна беда“. Сигурен съм, че скоро ще има нужда от душата си, ако желае да види цялата съдържана в тях красота, да не говорим, ако желае да ги изсвири за себе си или да си оформи мнение за автора. Всичко, което радетелите на материализма изтъкват, се разбива на парчета от този единствен пример.⁶

Много е вероятно главният от споменатите тук „радетели на материализма“ да е самият Жюлиен Офре дьо Ламетри – философ в двора на Фридрих Велики, автор на „Човекът машина“ и материалист пар екселанс. И досега, двеста години по-късно, не утихва битката между тези, които заемат страната на Йохан Михаел Шмит, и онези, които са съгласни с Жюлиен Офре дьо Ламетри. Надявам се тази книга да хвърли светлина върху това противостояние.

„Гьодел, Ешер, Бах“

Книгата е структурирана по необичаен начин – под формата на контрапункт между диалози и глави. Целта на тази структура е да ми позволи да представя новите понятия два пъти: почти всяко ново понятие първо се излага метафорично в диалог, при което предизвиква конкретни, живи образи; после, при четенето на главата след това, те служат за интуитивна основа за по-се-

риозно и абстрактно представяне на същото понятие. В много от диалозите на пръв поглед като че ли говоря за една идея, но в действителност говоря за някаква друга, при това не чак толкова замаскирана.

Първоначално единствените персонажи в диалозите ми бяха Ахил и Костенурката, които стигнаха до мен от Зенон от Елея посредством Луис Карол. Зенон от Елея, създател на парадокси, живял през V в. пр. Хр. Един от неговите парадокси е алегория, в която участват Ахил и Костенурката. За сътворяването на честитата двоица от страна на Зенон се разказва в първия диалог, „Тригласна инвенция“. През 1895 г. Луис Карол възкресява Ахил и Костенурката, за да онагледи своя нов парадокс за безкрайността. Парадоксът на Карол, който заслужава да бъде далеч познат, отколкото е, играе важна роля в тази книга. Първоначално озаглавен „Какво Костенурката каза на Ахил“, той е препечатан тук като „Двугласна инвенция“.

Когато започнах да пиша диалозите, по някакъв начин ги свързах с музикални форми. Не помня момента, в който стана това; само помня как един ден написах „Фуга“ над един от ранните диалози и оттогава идеята не ме е напускала. В крайна сметка реших по един или друг начин всеки диалог по един или друг начин да е свързан с различно произведение на Бах. Това не беше толкова неуместно. И старият Бах напомня на учениците си, че отделните части от техните композиции трябва да се държат като „хора, които разговарят помежду си, като че ли са в отбрано общество“. Може би съм възприел това предложение по-буквално, отколкото е имал предвид Бах; все пак се надявам, че резултатът съответства на замисъла му. Особено ме вдъхновяваха и ме поразяваха отново и отново елементи от композициите на Бах, които са описани така добре от Дейвид и Мендел в „Христоматия за Бах“:

Неговата форма като цяло се основава на отношенията между отделни части. Тези отношения варират от пълна идентичност на pasajите до завръщането на единствен принцип на разработка или проста тематична алюзия. Получаваните мотиви често са симетрични, но това съвсем не е задължително. Понякога отношенията между различните части изграждат лабиринт от преплетени нишки, който може да бъде разгадан

само след внимателен анализ. Все пак обикновено няколко доминиращи елемента позволяват надлежно ориентиране при пръв поглед или чуване и докато в течение на изучаването може да открием безброй тънкости, никога не се затрудняваме да усетим единството, което споява всяко едно творение на Бах.⁷

Желаех да изплета Една Гирлянда към Безкрайността от тези три нишки: Гюдел, Ешер, Бах. Започнах с намерението да напиша есе, в основата на което лежи теоремата на Гюдел. Представях си го като обикновена брошура. Но идеите ми се разшириха като сфера и скоро достигнаха Бах и Ешер. Отне ми известно време да реша да направя тази връзка явна, вместо да я оставя да бъде просто част от личната мотивация. Но в крайна сметка разбрах, че за мен Гюдел, Ешер и Бах са само сенки, хвърляни в различни посоки от една централно плътно ядро. Опитах се да възстановя този централен обект и така се получи тази книга.

Тригласна инвенция

На прашина писта под горещото слънце са застанали Ахил (гръцки воин, най-бързоногият сред всички смъртни) и една костенурка. Далеч към края на пистата на висок прът е окачено голям правоъгълен флаг. Флагът е изцяло червен, като изключим изрязаната в него дупка по формата на тънък пръстен, през която се вижда небето.

Ахил: Какъв е този странен флаг на другия край на пистата? Напомня ми на една гравюра от любимия ми художник М. К. Ешер.

Костенурката: Това е флагът на Зенон.

Ахил: Дали пък дупката в него не напомня за дупките в листа на Мьобиус, нарисуван от Ешер? В този флаг нещо не е наред, усещам го.

Костенурката: Изрязаният в него пръстен е с формата на нула, любимото число на Зенон.

Ахил: Но нулата още не е измислена! Ще я измисли някакъв индийски математик след хилядолетия. И тъй, г-жо К., моят аргумент доказва, че подобен флаг е невъзможен.

Костенурката: Аргументът ти е убедителен, Ахиле, и трябва да се съглася, че подобен флаг действително е невъзможен. Но все пак е красив, нали?

Ахил: О, да, няма съмнение в неговата красота.

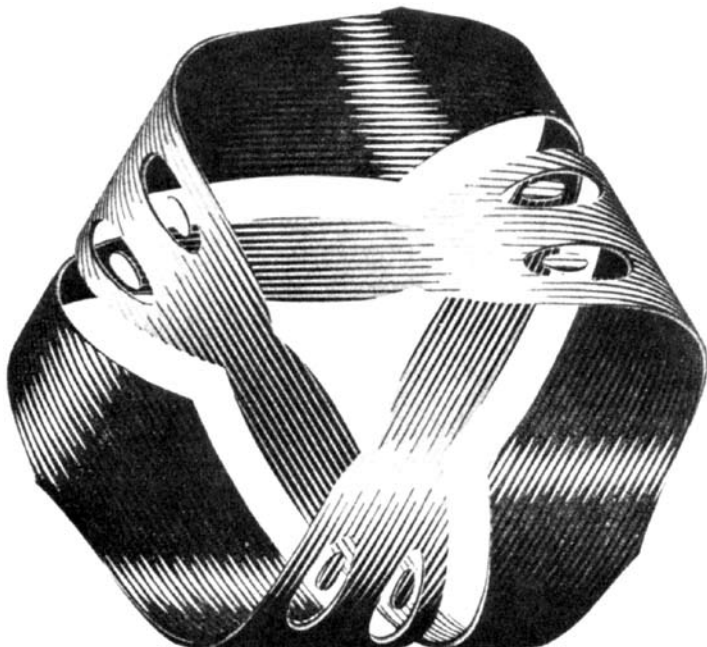
Костенурката: Чудя се дали красотата му е свързана с неговата невъзможност. Не знам, така и не ми остана време да анализирам Красотата. Това е Субстанция с Главна Буква, а все не ми остава време за Тях.

Ахил: Като говорим за Субстанции с Главна Буква, г-жо К., замисляли ли сте се някога за Смиъла на Живота?

Костенурката: О, небеса, не.

Ахил: Не сте ли се питали защо сме тук или кой ни е създал?

Костенурката: А, това е съвсем друга работа. Ние сме творения на Зенон (както скоро ще разбереш), а причината да сме тук е да се надбягваме.



Фиг. 10. „Лист на Мьобиус I“, М. Ешер
(гравюра върху дърво, четири цвята, 1961),8

Ахил: Надбягване? Това е нечувано! Аз, най-бързоногият сред всички смъртни, срещу вас, най-тромавия тътрузко на света! От подобно надбягване не може да има никакъв смисъл!

Костенурката: Можеш да ми дадеш преднина.

Ахил: Ще трябва да е огромна.

Костенурката: Нямам нищо против.

Ахил: Но пак ще ви настигна, рано или късно – по-вероятно рано.

Костенурката: Не и ако нещата се развият съгласно парадокса на Зенон. Разбираш ли, с помощта на нашето надбягване Зенон се надява да покаже, че движението е невъзможно. Според него движението изглежда възможно единствено в съзнанието. В действителност Движението е Принципно Невъзможно. Доказва го много елегантно.

Ахил: А, да, сега се сещам – знаменитият дзен коан за дзен учителя Зенон. Както казвате, наистина е съвсем просто.

Костенурката: Дзен коан? Дзен учител? Какво имаш предвид?

Ахил: Ето това. Двама монаси спорели за флага пред един храм. Единият казал: „Флагът се движи“. Другият казал: „Вятърът се движи“. Оттам случайно минавал Зенон, шестият патриарх. „Не е вятърът, който се движи, не е флагът, който се движи“, казал им той. „Съзнанието се движи“.

Костенурката: Опасявам се, че си се пообъркал, Ахиле. Зенон не е дзен учител, напротив. Той всъщност е гръцки философ от град Елея (който се намира по средата между точка А и точка В). След векове ще стане изключително известен с парадоксите си относно движението. В един от тях точно това надбягване между нас играе основна роля.

Ахил: Окончателно се обърках. Съвсем ясно си спомням как си повтарях отново и отново имената на шестимата патриарси на дзен и винаги казвах: „Шестият патриарх е Зенон, шестият патриарх е Зенон...“ (*Изведнъж излиза лек топъл бриз.*) О, вижте, г-жо Костенурка, погледнете как се вее флагът! Колко са хубави отблясъците от вълните по меката тъкан. И изрязаният пръстен също се вее!

Костенурката: Не ставай глупав. Флагът е невъзможен, следователно не може да се вее. Вятърът се вее.

(В този момент се появява Зенон.)

Зенон: Здравейте! Здравей-те! Какво става? Какво ново?

Ахил: Флагът се движи.

Костенурката: Вятърът се движи.

Зенон: О, приятели, приятели! Прекратете спора си! Укротете язвителността си! Отхвърлете разногласията си! Защото незабавно ще разреши въпроса вместо вас. Хей! И денят е тъй прекрасен!

Ахил: Този сигурно се прави на глупак.

Костенурката: Не, Ахиле, почакай. Да чуем какво има да ни каже. О, неизвестни господине, моля, споделете с нас своите мисли по този въпрос.

Зенон: С удоволствие! Не е вятърът, който се движи, не е флагът, който се движи – те не се движат и изобщо нищо не се движи. Защото открих една велика теорема, която гласи:

„Движението е Принципно Невъзможно“. И от тази теорема следва още по-велика – теоремата на Зенон: „Движението Не Съществува“.

Ахил: „Теоремата на Зенон“? Господине, да не би случайно да сте философът Зенон от Елея?

Зенон: Точно така, Ахиле.

Ахил (почесва се озадачено): Откъде ли знае как се казвам?

Зенон: Ще благоволите ли да изслушате обяснението ми защо е така? Този следобед съм дошъл от точка А чак до Елея, като се опитвах да намеря някой, който да обърне малко внимание на моето безупречно издържано доказателство. Но всички бързат насама и натам и нямат време. Не можете да си представите колко обезкуражаващо е да се сблъскаш с отказ след отказ. О, извинете ме, че ви товоря със своите грижи. Само искам да ви питам едно: ще угодите ли на стария философ за няколко минути – само няколко, обещавам – с неговите ексцентрични теории?

Ахил: О, разбира се! Моля, просветете ни. Знам, че говоря от името и на двама ни, понеже моята приятелка Костенурката тъкмо говореше за вас с голяма почит и изрично спомена парадоксите ви.

Зенон: Благодаря. Виждате ли, моят учител, петият патриарх, ме учеше, че реалността е една, непроменима и неизменна; всякаква множественост, промяна и движение са просто илюзия на сетивата. Някои се подиграваха на възгледите му, но аз ще покажа колко абсурдни са техните подигравки. Моето доказателство е съвсем просто. Ще го демонстрирам с двама измислени от мен персонажи: Ахил (гръцки воин, най-бързоногият сред всички смъртни) и една костенурка. В моята история един случаен минувач ги убеждава да се надбягват до далечен, веещ се от бриза флаг. Да допуснем, че понеже костенурката е много по-бавен бегач, получава преднина от, да речем, сто стъпки. Надбягването започва. Ахил бързо-бързо достига мястото, откъдето е тръгнала костенурката.

Ахил: Ха!

Зенон: Сега костенурката е едва на десет стъпки пред Ахил. Само след момент Ахил стига това място.

Ахил: Хо-хо!

Зенон: Но за този кратък момент костенурката е успяла да се придвижи малко напред. За миг Ахил покрива и това разстояние.

Ахил: Хе-хе-хе!

Зенон: Но за същия този съвсем къс миг костенурката е успяла да се премести съвсем мъничко напред и Ахил още е зад нея. Сега виждате, че за да настигне Ахил костенурката, тази „игра на гоненица“ трябва да бъде играна безкраен брой пъти – и поради това Ахил не може да настигне костенурката никога!

Костенурката: Хи-хи-хи-хи!

Ахил: Хм... Хм... Хм... Хм... Хм... Това доказателство ми изглежда грешно. Но въпреки това не мога да измисля какво му е грешното.

Зенон: Истинска главоблъсканица, нали? Това е любимият ми парадокс.

Костенурката: Извинете, Зеноне, но ми се струва, че вашата история е илюстрация на съвсем друг принцип, не е ли така? Току-що ни разказахте онова, което след векове ще стане известно като „Парадоксът за Ахил“ на Зенон, където се показва (хм!), че Ахил никога няма да настигне костенурката; но доказателството, че Движението е Принципно Невъзможно (и следователно Движението Не Съществува), се съдържа във вашия „парадокс за дихотомията“, нали?

Зенон: О, срамота! Разбира се, че сте права. Това е онзи парадокс, в който се обяснява как, за да стигнем от А до В, трябва първо да изминем половината път – а от тази половина също трябва да минем половината и така нататък, и прочее. Но всъщност и двата парадокса имат един и същ характер. Ако трябва да сме честни, имам само една Велика идея – просто я използвам по различни начини.

Ахил: Кълна се, тези доказателства съдържат грешка. Не разбирам точно къде, но не може да са верни.

Зенон: Съмняваш се в правилността на моя парадокс? Защо не го проверите? Нали виждаш онзи червен флаг в другия край на пистата?

Ахил: Невъзможния флаг, вдъхновено от гравюра на Ешер?

Зенон: Точно така. Какво ще кажеш, ако се надбягвате с г-жа Костенурка до него, като ѝ дадеш една прилична преднина от, не знам...

Костенурката: Например сто крачки?

Зенон: Сто крачки, много добре.

Ахил: Винаги.

Зенон: Отлично! Колко вълнуващо! Емпирична проверка на моята строго доказана Теорема! Г-жо Костенурка, ще застанете ли сто крачки по-напред?

*(Костенурката се премества
сто крачки по-близо до флага.)*

Готови ли сте?

Костенурката и Ахил: Да!

Зенон: Готови! Старт!

Глава I

Загадката МУ

Формални системи

Едно от основните понятия в тази книга е понятието за *формална система*. Използваният от мен тип формална система е измислен от американския логик Емил Пост през 20-те години и често се нарича „система на Пост“. В тази глава ще се запознаете с една формална система, а освен това се надявам, че ще пожелаете да изследвате тази формална система поне още малко. Тъй че, за да предизвикам вашето любопитство, поставям една малка загадка.

Загадката е: „Можете ли да произведете МУ?“ Отначало ви се дава един низ (това значи низ от букви).^{*} За да не ви държа в напрежение, този низ е **MI**. След това ви се съобщават някои правила, по които можете да превръщате един низ в друг. Ако в даден момент е приложимо някое от тези правила и вие искате да го използвате, можете да го направите, но ако може да се приложат няколко правила, няма нищо, което да ви предписва точно кое да употребите. За това решавате вие – и разбира се, тук е частта, където играта с която и да е формална система може да се превърне в нещо като изкуство. Основно положение, което почти няма нужда да се казва изрично, е да не вършите нищо извън позволеното от правилата. Можем да наречем това ограничение „изискване за формалност“. В тази глава вероятно въобще не е необходимо да наблягаме върху него. Но колкото и странно да

^{*} В тази книга ще използваме следната конвенция, когато става дума за низове. Когато низът е със същия шрифт като текста, тогава ще бъде затворен в кавички. Пунктуацията, която е част от изречението, а не от разглеждания низ, ще бъде извън кавичките, както е логично. Например първата буква на това изречение е „Н“, докато първата буква на „това изречение“ е „т“. Но когато низът е със **друг шрифт**, кавичките обикновено ще бъдат пропускани, освен ако не се налагат заради яснота. Например първата буква на **друг** е **g**.

звучи, предвиждам, че когато си играете с някои от формалните системи в следващите глави, ще се улавяте непрекъснато да нарушавате изискването за формалност, освен ако не сте работили с формални системи и по-рано.

Първото, което трябва да кажем за нашата формална система – системата MIU, – е, че тя използва само три букви от азбуката: **М**, **И** и **U**. Това значи, че единствените низове в системата MIU са низове, които се състоят от тези три букви. Ето някои низове от системата MIU:

MI
UIM
MIUMIU
UIMIUIMIUIMIUIMIUIMIU

Но макар всички те да са допустими низове, вие не „разполагате“ с тях. Всъщност единственият низ, с който разполагате засега, е **MI**. Можете да увеличите частната си колекция единствено като използвате правилата, които ще изложим сега. Ето първото правило:

ПРАВИЛО I: Ако притежавате низ, чиято последна буква е **I**, можете да прибавите към края му **U**.

Между другото, ако досега не сте се досетили, важна част от значението на „низ“ е, че буквите в него са в установен ред. Например **MI** и **IM** са два различни низа. Низът от символи не е просто „торба“ символи, където поредността няма никакво значение.

Ето второто правило:

ПРАВИЛО II: Да допуснем, че имате **Mx**. Тогава към колекцията си можете да прибавите **Mxx**.

В няколкото примера по-долу показвам какво имам предвид:

От **MIU** можете да получите **MIUIU**.

От **MUM** можете да получите **MUMUM**.

От **MU** можете да получите **MUIU**.

Тъй че буквата „x“ в правилото просто обозначава който и да е низ, но щом веднъж решите кой ще е този низ, не бива да

променят избора си (докато не употребите правилото пак, тогава можете да изберете отново). Обърнете внимание на третия пример по-горе. Там се вижда как щом веднъж имате **МУ**, можете да прибавите друг низ към своята колекция; но първо трябва да получите **МУ**! И да добавя една последна забележка за буквата „х“: тя не е част от формалната система по същия начин, по който трите букви „М“, „I“ и „U“ са част от нея. Но за нас е полезно да можем да говорим общо за низовете от системата – и това е функцията на „х“, да обозначава произволен низ. Ако прибавите към „колекцията“ си низ, който съдържа „х“, постъпвате грешно, тъй като низовете от системата **MIU** никога не съдържат „х“! Ето третото правило:

ПРАВИЛО III: Ако в някой низ от колекцията ви има **III**, можете да направите нов низ с **U** на мястото на **III**.

Примери:

От **UMIIIMU** можете да направите **UMIMU**.

От **MIII** можете да направите **MIU** (също и **MUI**).

От **IIII** не можете да получите нищо с това правило. (Трите **I** трябва да са последователни.)

От **MIII** правите **MU**.

В никакъв случай не мислете, че можете да изпълните това правило в обратна посока, както в следния пример:

От **MU** правите **MIII**. ⇐ Това е грешно.

Правилата са еднопосочни.

И последното правило:

ПРАВИЛО IV: Ако в някой ваш низ има **UU**, можете да го премахнете.

От **UUU** получавате **U**.

От **MUUUUU** получавате **MUUU**.

Ето това е. Сега вече можете да се опитате да получите **MU**. Не се притеснявайте, ако някои неща не са ви ясни. Просто си поиграйте известно време – важното е да усетите същността на загадката **MU**. Приятно прекарване.

Теорема, аксиома, правила

Отговорът на загадката MU е даден по-нататък в книгата. За сега важното е не неговото намиране, а търсенето му. Вероятно сте се опитали да произведете **MU**. Докато сте го правели, сте събрали собствена колекция от низове. Такива низове, които могат да се произведат чрез правилата, се наричат теорема. Разбира се, понятието „теорема“ обикновено се употребява в математиката в съвсем различен смисъл. То означава някакво твърдение на обикновен език, чиято истинност е доказана чрез строги разсъждения, като теоремата на Зенон за несъществуването на движението или теоремата на Евклид, че простите числа са безкраен брой. Но във формалните системи няма нужда теоремите да се смятат за твърдения – те са просто низове от символи. И вместо да се доказват, те просто се извеждат, практически механично, съгласно определени типографски правила. За да подчертая тази важна разлика в значенията на думата „теорема“, ще възприема следната конвенция: когато „теорема“ е изписана с главна буква, значението на думата ще бъде обичайното – Теоремата е твърдение на обикновен език, което някой е доказал за истинно чрез някакви логически разсъждения. Когато е оставена с малка буква, „теорема“ ще има техническото си значение – низ, който може да бъде изведен в някаква формална система. Като ползваме тези понятия, загадката MU ви пита дали **MU** е теорема от системата MIU.

В началото ви дадох една теорема безплатно, по-точно **MI**. Такава „безплатна“ теорема се нарича аксиома – техническото значение отново е доста различно от обичайното. Една формална система може да има нула, една, няколко или дори безброй много аксиоми. В книгата има примери за всички тези типове.

Всяка формална система притежава правила за боравене със символи, подобни на четирите правила от системата MIU. Тези правила се наричат или правила за извод, или продукционни правила. Ще използвам и двата термина.

Последният термин, който бих искал да въведа засега, е извеждане. Ето как изглежда извеждането на теоремата **MIIIU**:

- | | |
|----------------|------------------------|
| (1) MI | аксиома |
| (2) MII | от (1) чрез правило II |

- | | |
|------------|-------------------------|
| (3) МIII | от (2) чрез правило II |
| (4) MIII | от (3) чрез правило I |
| (5) MIIU | от (4) чрез правило III |
| (6) MIIIIU | от (5) чрез правило II |
| (7) MIIU | от (6) чрез правило IV |

Извеждането на теорема е ясно показване ред по ред как да бъде получена тази теорема съгласно правилата на формалната система. Понятието за извеждане следва образа на понятието за доказателство, но извеждането е един простичък братовчед на доказателството. Би звучало странно, ако обявите, че сте доказали MIIU, но не е странно да кажете, че сте извели MIIU.

Вътре в системата и извън нея

Повечето хора подхождат към загадката MU, като извеждат няколко случайни теореми просто за да видят какви неща се получават. Съвсем скоро почват да забелязват някои закономерности в теоремите, които са произвели; ето тук човешкият разум излиза на сцената. Например вероятно за вас не е било очевидно, че всички теореми започват с M, докато не сте извели няколко. След това закономерността е станала видима и не само сте я разпознали, но и сте разбрали защо се получава така след поглед към правилата, които имат свойството да карат всяка нова теорема да наследява първата си буква от предишна теорема; така в крайна сметка първите букви на всички теореми може да се проследят до първата буква на единствената аксиома MI – и това е доказателство, че всички теореми на системата MIU трябва да започват с M.

Това развитие на нещата има изключително значение. То показва една разлика между хората и машините. Несъмнено би било възможно – всъщност ще е много лесно – да се програмира компютър да генерира теорема след теорема от системата MIU; и в програмата можем да включим команда тя да спре единствено след като генерира U. Сега вече знаете, че така програмираният компютър никога няма да спре. И това не ви удивлява. А какво ще стане, ако помолите някой приятел да генерира U? Няма да се изненадате, ако след малко той се върне, като се оплаква, че не

може да се отърве от началното М и сте го пратили за зелен хайвер. Дори и не много умен човек пак ще направи някакви наблюдения върху това, което върши, и те ще му позволят да получи добра представа за задачата – нещо, на което описаната от нас компютърна програма не е способна.

Нека бъда напълно ясен какво точно имах предвид, когато казах, че това показва една разлика между хората и машините. Имах предвид, че е *възможно* машина да бъде програмирана да върши рутинна задача по такъв начин, че машината никога да не забележи дори най-очевидните неща за това, което прави. Но това ви е добре известно. Ако вкарате „1“ в калкулатор, прибавите 1 към него, после пак прибавите 1, и пак, и пак, и продължите да го правите с часове, калкулаторът никога няма да се научи да предвижда вашите действия и да направи нещо сам, докато всеки човек бързо ще схване повтарящото се поведение. Или, да вземем един глупав пример, една кола, независимо колко много или колко добре се кара, никога няма да схване идеята, че трябва да избягва другите коли и препятствия по пътя, нито пък някога ще научи маршрутите, по които най-често пътува собственикът ѝ.

Значи разликата е, че е *възможно* машината да действа без наблюдателност, но е невъзможно човек да действа без наблюдателност. Забележете, че не твърдя, че всички машини са задължително неспособни да извършват сложни наблюдения, а само че някои машини са такива. Нито твърдя, че всички хора винаги правят сложни наблюдения; всъщност често хората са много ненаблюдателни. Но машините могат да бъдат направени без каквато и да е наблюдателност, докато хората не могат. И всъщност повечето направени досега машини са почти напълно лишени от наблюдателност. Вероятно заради това за повечето хора тази особеност, липсата на наблюдателност, е характерна черта на машините. Например ако кажем, че някоя задача е „механична“, това не значи, че хората не са способни да я вършат, но се подразбира, че единствено машина може да я изпълнява отново и отново, без да се оплаква или да ѝ доскучае.

Да излезеш извън системата

Характерна особеност на разума е, че може да изскочи от изпълняваната задача и да изследва какво е свършил; той винаги

търси закономерности и често ги намира. Казах, че разумът може да изскочи от своята задача, но това не значи, че винаги ще го прави. Но често за това е достатъчен само малък тласък. Например на човек, който чете книга, може да му се доспи. Вместо да продължава да чете, докато свърши книгата, също толкова вероятно е да я остави и да загаси лампата. Той е излязъл „извън системата“ и все пак това ни изглежда най-естественото нещо на света. Или да си представим, че А гледа телевизия, когато В влиза в стаята и показва явно неудоволствие от ситуацията. А смята, че разбира проблема, и решава да го поправи, като излезе от текущата система (тази телевизионна програма) и превключи каналите в търсене на по-добро предаване. От друга страна, В може да има по-радикална представа какво значи „да излезеш от системата“ – а именно, да изключиш телевизора! Разбира се, в някои случаи само отделни изключителни личности имат проникателността да забележат система, която направлява живота на много хора, система, която дотогава дори не е възприемана като такава; тези хора често посвещават живота си на това, да убеждават другите, че системата наистина съществува и че трябва да излязат от нея!

Доколко компютрите са научени да излизат извън системата? Ще приведа един пример, който изненада някои наблюдатели. Неотдавна на шахматен турнир за компютри в Канада една програма – най-слабата от състезаващите се – имаше необичайната черта да се отказва дълго преди играта да завърши. Тя не беше особено добър шахматист, но като компенсация поне притежаваше качеството да може да забележи безнадеждната позиция и да се предаде още тогава, вместо да чака другата програма да изпълнява досадния ритуал на матирането. Макар да изгуби всичките си мачове, поне го направи със стил. Това впечатли много от местните шахматни специалисти. И тъй, ако дефинирате „система“ като „правене на ходове в игра на шах“, става очевидно, че тази програма притежава сложна, предварително програмирана способност да излиза извън системата. От друга страна, ако под „система“ разбирате „всичко онова, което компютърът е програмиран да прави“, то няма съмнение, че компютърът е абсолютно неспособен да излезе извън тази система.

Много е важно при изучаването на формалните системи да разграничаваме работата в рамките на системата от правенето на

наблюдения или изказването на твърдения за системата. Предполагам, че както повечето хора, сте започнали загадката MU с работа в системата, постепенно сте губели търпение и накрая нетърпението ви е стигнало до точката, където, без повече му мислите, сте излезли от системата, опитали сте да прегледате какво сте произвели и сте се чудели защо не сте успели да произведете MU. Може би сте намерили причина да не можете да произведете MU; това е мислене за системата. Може би някъде по пътя сте произвели MIU; това е работа в рамките на системата. Не ми се ще да прозвучи, като че ли тези два режима са напълно несъвместими; сигурен съм, че всеки човек е способен до известна степен да работи вътре в системата и едновременно да мисли за това, което прави. Всъщност при хората често е практически невъзможно нещата да се разделят стриктно на „вътре в системата“ и „извън системата“; животът се състои от толкова много взаимодействия си, преплетени и често противоречиви „системи“, че изглежда опростенческо да се мисли за нещата по този начин. Но често е важно простите идеи да бъдат формулирани съвсем ясно, за да можем да ги ползваме като модели при мисленето за по-сложни идеи. Затова и ви разказвам за формалните системи, но вече е време да се върнем към обсъждането на системата MIU.

М-режим, I-режим, U-режим

Загадката MU беше поставена по такъв начин, че подканваше към известни изследвания в рамките на системата MIU – извеждане на теореми. Но освен това беше поставена така, че да не създаде впечатлението, че може да се стигне до резултат само като се остава в рамките на системата. И тъй тя окуражаваше известно прескачане между двата режима на работа. Един начин да разделите двата режима е да имате два листа хартия; на единия лист работите „в качеството си на машина“ и го изписвате само с **M**, **I** и **U**, а на другия лист работите „в качеството си на мислещо същество“ и можете да правите всичко, каквото ви подсказе разумът ви – например да използвате английски, да нахвърляте идеи, да работите отзад напред, да ползвате съкращения (като буквата „х“), да обединявате няколко стъпки в една, да променяте правилата, за да видите какво ще стане, или всичко друго, за

което се сетите. Вероятно сте забелязали, че числата 3 и 2 играят важна роля, понеже **I** се премахват по три, а **U** – по две, а пък правило II позволява удвояване на дължината (като изключим **M**). Тъй че вторият лист би могъл да съдържа и някакви изчисления. От време на време ще се позоваваме на тези два режима на работа с формална система и ще ги наричаме „механичен режим“ (*M-режим*) и „интелигентен режим“ (*I-режим*). За да закръглим режимите и да бъдат по един за всяка буква от системата MIU, ще спомена и един последен режим, „не-режим“ (*U-режим**), което е дзен подходът към нещата. По-подробно за това след няколко глави.

Разрешаващи процедури

В тази загадка стигаме до следното наблюдение – в нея са включени правила с противоположна насоченост: удължаващи правила и скъсяващи правила. Две правила (I и II) ви позволяват да увеличите размера на низовете (но само по строго установен начин, разбира се), а две други ви позволяват донякъде да намалите низовете (отново по твърдо зададен начин). Както изглежда, има безкрайно разнообразие в реда, по който може да се прилагат тези правила, и това ни дава надежда, че по един или друг начин би могло да се произведе **MU**. Може би това става, като низът се удължи до някакъв гигантски размер и после се вадят парче по парче, докато останат само два символа; или, полошо, да става с последователни удължавания, скъсявания, пак удължавания и пак скъсявания и т.н. Но няма никаква гаранция за това. Всъщност вече забелязахме, че **U** изобщо не може да бъде произведено, и няма значение дали удължавате и скъсявате до свършека на света.

Все пак случаят с **U** и случаят с **MU** изглеждат съвсем различни. Разпознаваме, че **U** не може да бъде произведено, по негова съвсем повърхностна черта – то не започва с **M** (докато всички теореми трябва да започват така). Много е удобно да имаме подобен прост начин да бъдат улавяни нетеоремите. Но кой е казал, че тази проверка ще засече всички нетеореме? Може би

* В оригинала Un-mode. – Б. пр.

има много низове, които започват с **M**, но не могат да бъдат произведени. Може би **MU** е един от тях. Това значи, че ползата от „проверката с първата буква“ е ограничена и тя може да открие само част от нетеоремите, но пропуска останалите. Но пък остава възможността за някаква по-сложна проверка, която идеално разграничава низовете, които могат да се произведат по правилата, от онези, които не могат. Тук трябва да поставим въпроса: „Какво имаме предвид под проверка?“ В този контекст може да не е очевидно защо този въпрос има смисъл и е важен. Но ще ви дам един пример за „проверка“, който като че ли някак си противоречи на духа на думата.

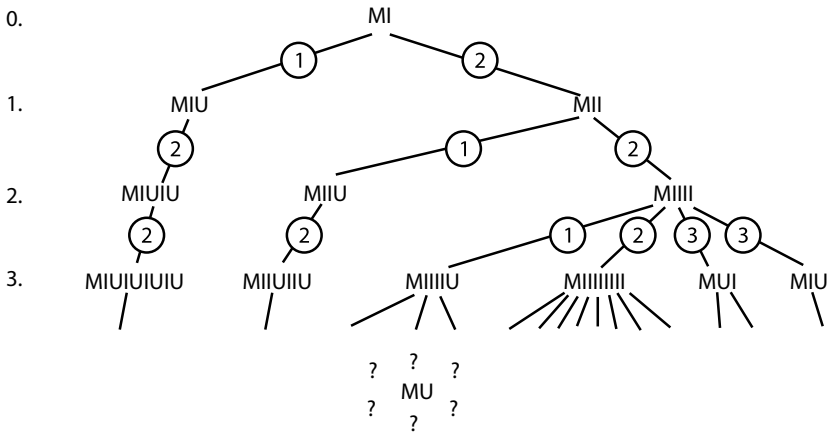
Представете си джин, който разполага с цялото време на света и го използва, за да извежда теореми от системата **MU** с методичен подход. Ето един възможен начин на действие на джина:

Стъпка 1: Прилагаме всички възможни правила върху аксиомата **MU**. Това дава две нови теореми, **MUU** и **MUUU**.

Стъпка 2: Прилагаме всички възможни правила върху теоремите, произведени в стъпка 1. Това дава три нови теореми, **MUUUU**, **MUUUUU**, **MUUUUUU**.

Стъпка 3: Прилагаме всички възможни правила върху теоремите, произведени в стъпка 2. Това дава пет нови теореми, **MUUUUUUU**, **MUUUUUUUU**, **MUUUUUUUUU**, **MUUUUUUUUUU**, **MUUUUUUUUUUU**.

Този метод рано или късно ще произведе всяка една теорема, понеже правилата се прилагат във всеки възможен ред. (Вижте фиг. 11.) В края на краищата ще бъдат извършени всички споменати по-горе комбинации от удължаване и скъсяване. Но не е ясно колко ще трябва да чакаме даден низ да се появи в списъка, понеже теоремите са подредени по дължината на тяхното извеждане. Това не е особено полезна подредба, ако се интересувате от конкретен низ (като **MU**) и не само не знаете колко дълго е неговото извеждане, а и дали изобщо съществува такава.



Фиг. 11. Систематично построено „дърво“ от всички теореми в системата MIU. N-тото ниво съдържа теоремите, чието извеждане се състои от точно N стъпки. Числото в кръгчето показва кое правило е било приложено. Съществува ли **МУ** някъде в дървото?

Сега можем да изложим предложената „проверка за теоремност“:

Изчакайте, докато бъде произведен търсеният низ; когато това се случи, знаете, че той е теорема – а ако никога не се случи, знаете, че не е теорема.

Това е смехотворно, понеже предполага, че нямаме нищо против да чакаме отговор буквално безкрайно дълго време. Така стигаме до същината на въпроса какво трябва да се смята за „проверка“. Изключително важно е да има гаранция, че ще получим отговор за краен интервал от време. Ако съществува проверка за теоремност, проверка, която винаги завършва за крайно време, тогава тази проверка се нарича *разрешаваща процедура* за дадената формална система.

Когато притежавате такава процедура, разполагате със съвсем конкретна характеристика на природата на всички теореми в системата. На пръв поглед правилата и аксиомите на формалната система дават също толкова пълна характеристика на теоремите ѝ. Тук ключовата дума е „характеризация“. Несъмнено правилата за извод и аксиомите на системата MIU характеризират неявно

низове, които са теореми. Дори още по-неявно характеризират и низове, които не са теореми. Но в много случаи неявната характеристика не е достатъчна. Ако някой твърди, че разполага с характеристика за всички теореми, но му трябва безкрайно дълго време да заключи дали даден низ не е теорема, вероятно ще сметнете, че на тази характеристика нещо не ѝ достига – че не е достатъчно конкретна. И затова да се открие съществуването на разрешаваща процедура е толкова важна стъпка. Това откритие на практика означава, че върху низа можете да изпълните проверка за теоремност и че дори проверката да е сложна, тя гарантирано ще завърши. Теоретично тази проверка е също толкова лесна, механична, крайна във времето и сигурна, колкото да се провери дали първата буква от низа е **M**. Разрешаващата процедура е „лакмусов тест“ за теоремност!

Между другото, едно от изискванията към формалните системи е наборът от *аксиоми* да се характеризира с разрешаваща процедура – трябва да има лакмусов тест за аксиомност. Това гарантира, че няма да има проблеми поне при „започването на движението“. И това е разликата между набора от аксиоми и набора от теореми: за първите винаги има разрешаваща процедура, а за вторите може и да няма такава.

Сигурен съм, ще се съгласите, че когато сте погледнали за първи път системата **MIU**, сте били изправени пред точно същия проблем. Единствената аксиома е известна, правилата за извод са лесни, тъй че теоремите са неявно характеризирани – и все пак е твърде неясно какви са следствията от тази характеристика. И по-точно, напълно неясно е дали **MU** е теорема, или не е.

Двугласна инвенция

или

Какво костенурката каза на Ахил от Луис Карол¹

Ахил е надбягал костенурката и е седнал удобно върху нея.

– Значи стигна до края на нашата писта за надбягвания? – каза костенурката. – Въпреки че се състои от безкрайна последователност от разстояния? Мислех, че някакъв умник беше доказал, че не може да бъде направено?

– *Може!* – каза Ахил. – *Правено е! Solvitur ambulando**. Разбирате ли, разстоянията постоянно *намаляваха*, така че...

– Ами ако постоянно се *увеличаваша*? – прекъсна го костенурката. – Тогава какво?

– Тогава нямаше да съм тук – отговори скромно Ахил, – а *вие* досега да сте обиколили света няколко пъти!

– Какъв ласкател – искам да кажа, *сплескател* – каза костенурката, – понеже си *тежиш* на мястото, няма грешка. А искаш ли да чуеш за един път, за който повечето хора си мислят, че могат да стигнат до края му с две или три стъпки, макар *в действителност* да се състои от безкраен брой разстояния, всяко по-дълго от предишното?

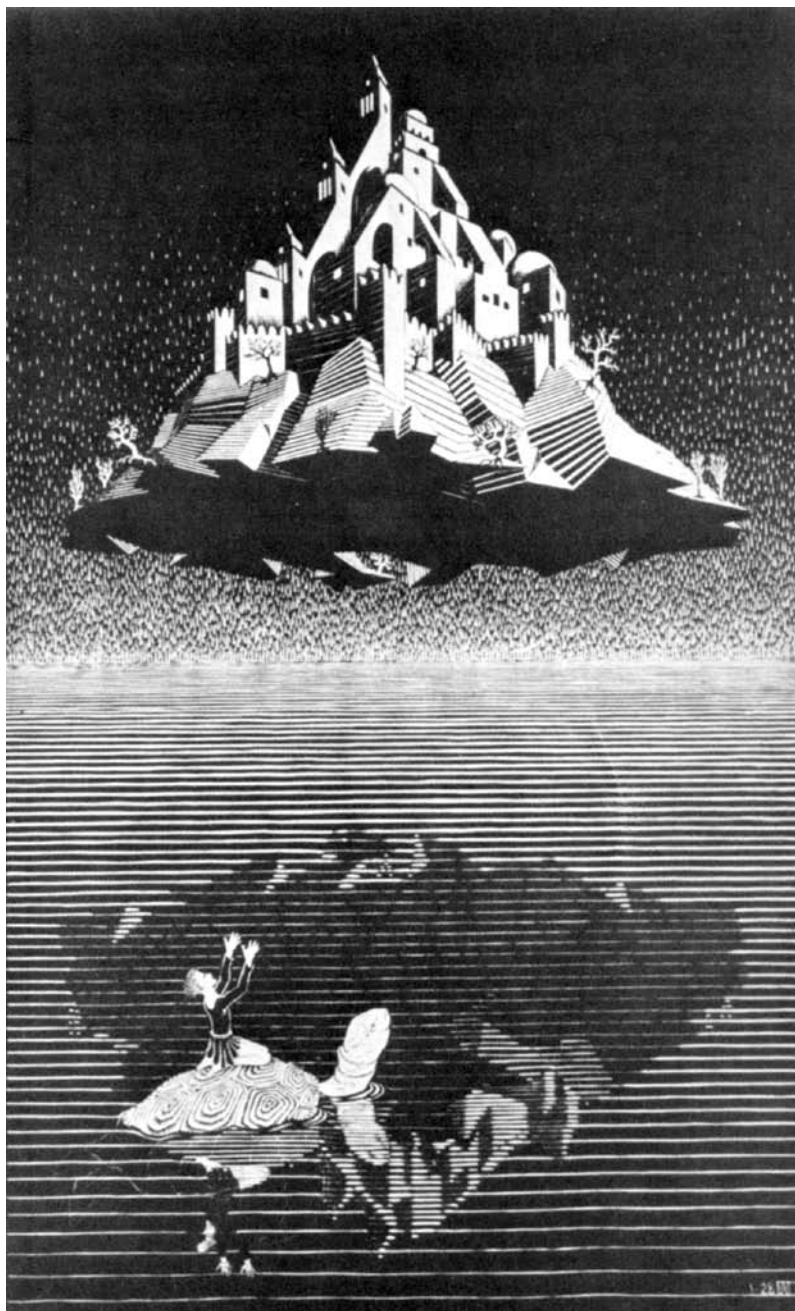
– Определено! – отвърна гръцкият воин и извади от шлема си (в онези дни малцина гръцки воители имаха *джобове*) молив и огромен бележник. – Започвайте! И говорете *бавно*, моля! *Стенографията* още не е изобретена!

– Прекрасното първо предложение на Евклид! – промълви замечтано костенурката. – Почитател ли си на Евклид?

– Страстен! Доколкото, разбира се, е възможно да бъдеш почитател на трактат, издаден едва след няколко века.

– Добре тогава, да вземем част от разсъжденията в Първото предложение – само *две* стъпки и заключението, изведено от

* Буквално „Решава се чрез ходене“ (лат.). – Б. пр.



Фиг. 12. „Небесен замък“, М. Ешер (дърворез, 1928 г.)

тях. Ако обичаш, запиши ги в бележника си. И за да ни е удобно да говорим за тях, да ги наречем А, В и Z:

(А) Равните на едно и също са равни и помежду си.

(В) Двете страни на този триъгълник са неща, които са равни на едно и също.

(Z) Двете страни на този триъгълник са равни помежду си.

Предполагам, читателите на Евклид ще се съгласят, че Z следва логически от А и В, тъй че всеки, който приема А и В за истинни, *трябва* да приеме Z за истинно?

– Несъмнено! И най-малкият ученик от гимназията – щом бъдат измислени гимназиите, което ще стане чак след около две хиляди години – ще се съгласи с *това*.

– А ако някой читател *не приема* А и В за истинни, предполагам, че все пак може да приема *самото следване* като *валидно*?

– Несъмнено може да съществува такъв читател. Той би могъл да каже: „Приемам като истина хипотетичното твърдение, че *ако* А и В са истина, то Z също е истина, но *не приемам* А и В за истина“. Подобен читател ще постъпи мъдро, ако се откаже от Евклид и се заеме с футбол.

– А не е ли възможно *също* да има читател, който да каже: „Приемам А и В за истинни, но не приемам хипотетичното твърдение“?

– Определено е възможно. *И той* по-добре да се захване с футбол.

– *И никой* от тези читатели – продължи костенурката – все *още* не е задължен с логическа необходимост да приеме Z за истина?

– Точно така – съгласи се Ахил.

– Добре, тогава смятай *мен* за читател от *втория* вид и ме накарай чрез логиката да приема Z за истинно.

– Костенурка, която играе футбол, ще бъде... – започна Ахил.

– ... аномалия, разбира се – бързо го прекъсна костенурката.

– Не се отклонявай от въпроса. Нека първо се оправим със Z, а футболът – после.

– И трябва да ви накарам да приемете Z, така ли? – замислено каза Ахил. – А сегашната ви позиция е, че приемате А и В, но *не приемате* хипотетичното твърдение...

– Да го наречем С – каза костенурката.

– ... но не приемате

(С) Ако А и В са истина, то Z също е истина.

– Такава е сегашната ми позиция – каза костенурката.

– Тогава трябва да ви помоля да приемете С.

– Ще го направя – каза костенурката – веднага щом го запишеш в бележника си. Какво друго има в него?

– Само няколко бележки – каза Ахил, докато нервно разгръщаше листовете, – няколко бележки за битките, в които съм се отличил!

– Празните страници са много, виждам! – бодро отбеляза костенурката. – Ще ни трябват *всичките!* (Ахил *потреперва.*) Сега пиши, докато диктувам:

(А) Равните на едно и също са равни и помежду си.

(В) Двете страни на този триъгълник са неща, които са равни на едно и също.

(С) Ако А и В са истина, то Z също е истина.

(Z) Двете страни на този триъгълник са равни помежду си.

– Трябва да го наречете D, не Z – каза Ахил. – То идва *веднага* след другите три. Ако приемате А, В и С, *трябва* да приемете Z.

– И защо трябва?

– Защото то следва *логически* от тях. Ако А и В, и С са истина, то Z *също* е истина. Не можете да оспорите *това*, нали?

– Ако А и В, и С са истина, то Z *също* е истина – повтори замислено костенурката. – Това е *друга* хипотеза, не е ли така? И ако не успея да видя нейната истинност, бих могла да приема А, В и С, но *все пак* да не приема Z, нали?

– Възможно е – призна искрено хероят, – макар че подобна невъзприемчивост със сигурност ще е феноменална. Все пак е *възможно*. Така че трябва да ви помоля да се съгласите с *още* една хипотеза.

– Много добре, нямам нищо против да се съглася с нея, щом я запишеш. Ще я наречем

(D) Ако А и В, и С са истина, то Z също е истина.

Записа ли я в бележника си?